MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XLVIII (2020)

К ПОСТРОЕНИЮ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ НЕЭКСТЕНСИВНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ КАППА-ЭНТРОПИИ КАНИАДАКИСА

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. Москва, Россия
* Ответственный автор. E-mail: kolesn@keldysh.ru

DOI: 10.20948/mathmontis-2020-48-10

Ключевые слова: Энтропия Каниадакиса, неэкстенсивная статистика, дивергенция Брэгмана.

Аннотация. Как известно, в физике и в других естественных науках, использующих методы статистической механики, имеются многочисленные примеры аномальных систем с дальним силовым взаимодействием, фрактальным характером фазового пространства и значительными корреляциями между отдельными их частями. Сложная пространственно-временная структура подобных систем приводит к нарушению принципа аддитивности (экстенсивности) для таких важнейших термодинамических величин, как энтропия или внутренняя энергия. В настоящее время теории разнообразных неэкстенсивных систем развиваются в ускоренном темпе, при котором появляются новые идеи, позволяющие глубже понять их природу, возможности и ограничения. Каждая такая теория имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой статистических систем, вероятностные свойства которых описываются не гиббсовыми (и не гауссовыми), а асимптотическими степенными распределениями. В частности, неэкстенсивная статистическая механика Каниадакиса успешно применяется к космическим системам с дальним силовым взаимодействием, которое и является причиной их аномальности.

В представленной работе в рамках неэкстенсивной статистики Каниадакиса, основанной на параметрической κ-энтропии, показано, как можно получить деформированную термодинамику сложных аномальных систем и определить её свойства. Приведены основные математические свойства κ-логарифма и κ-экспоненты, а также другие связанные с ними функции, возникающие при разработке неэкстенсивной механики Каниадакиса. В результате получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых подсистем при их тепловом контакте и введена так называемая физическая температура, отличная от инверсии множителя Лагранжа β. С привлечением обобщённого первого закона термодинамики и преобразования Лежандра и на основе введённой энтропии Клаузиуса получены новые термодинамические соотношения, которые отличны от выведенных ранее традиционным для неэкстенсивной статистики способом соотношений, неудовлетворительных с точки зрения макроскопической термодинамики. На основе свойства выпуклости дивергенции Брэгмана изучены спонтанные переходы между стационарными состояниями сложной κ-системы и доказаны теорема Гиббса и *H*-теорема Больцмана. Развитый в работе подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды от галактик и астрофизических дисков до космической плазмы и пыли.

2010 Mathematics Subject Classification: 85A35, 91B50, 82C40.
Key words and Phrases: Kaniadakis entropy, non-extensive statistics, Bregman divergence.

TOWARDS THE DEVELOPMENT OF THERMODYNAMICS OF NONEXTENSIVE SYSTEMS BASED ON KAPPA-ENTROPY КANIADAKIS

A.V. KOLESNICHENKO*

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
*Corresponding author. E-mail: kolesn@keldysh.ru

DOI:10.20948/mathmontis-2020-48-10

Summary. As is known, in physics and in other natural sciences using the methods of statistical mechanics, there are numerous examples of anomalous systems with long-range force interaction, the fractal nature of the phase space and significant correlations between their individual parts. The complex spatio-temporal structure of such systems leads to a violation of the principle of additivity (extensiveness) for such important thermodynamic quantities as entropy or internal energy. At present, theories of diverse non-extensive systems are developing at an accelerated pace, at which new ideas appear that allow a deeper understanding of their nature, capabilities and limitations. Each such theory has a wide range of important applications related to the physics of statistical systems whose probabilistic properties are described not by Gibbs (and not Gaussian), but by power-law distributions. In particular, the non-extensive statistical mechanics of Kaniadakis is successfully applied to space systems with long-range force interaction, which is the reason for their anomaly.

In the framework of non-extensive statistical mechanics of Kaniadakis based on parametric κ-entropy, it is shown how to obtain the deformed statistical thermodynamics of complex anomalous systems and determine its properties. The paper presents the basic mathematical properties of the κ-logarithm and κ-exponent, as well as other related functions that arise during the development of the statistical mechanics of Kaniadakis. As a result, a generalization is obtained for the case under consideration of the zero law of thermodynamics for two independent subsystems with their thermal contact and the so-called physical temperature is introduced, which differs from the inversion of the Lagrange multiplier. Using the generalized first law of thermodynamics and the Legendre transformation, and based on the introduced Clausius entropy, new thermodynamic relations are obtained that are different from the relationships that were previously unsatisfactory from the point of view of deformed thermodynamics, which were traditionally used for non-extensive statistics. Based on the property of convexity of Bergman divergence, spontaneous transitions between stationary states of a complex β-system are studied and the Gibbs theorem and the Boltzmann *H*-theorem are proved.

The approach developed in the work allows modeling, in particular, complex cosmological and cosmogonic environments from galaxies and astrophysical disks to cosmic plasma and dust.

ВВЕДЕНИЕ

Исследования в области механики неаддитивных (неэкстенсивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса, что объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений. Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса [1], в которой была введена так называемая q-энтропия $S_q^{Ts}(p) := \frac{k_{\mathrm{B}}}{q-1}\int\left(p - p^q\right)d\Gamma$, зависящая от некоторого действительного числа q (параметра деформации) и обладающая неаддитивностью для совокупности независимых аномальных систем. Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается. В научной литературе доступны систематизированные собрания обзоров, дающие последовательное изложение многочисленных новых результатов, полученных в ходе изучения неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях (см. библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. cat.cbpf.br/ biblio.htm, которая постоянно обновляется [2]).

Определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Основой исследований в области неэкстенсивных статистик, проводимых в настоящее время, являются многочисленные нелогарифмические энтропии, введенные, например, в работах [1,3-20]. При этом каждая неэкстенсивная статистика имеет широкий спектр важных приложений, связанных с физикой аномальных систем, вероятностные свойства которых определяются не гиббсовым (не гауссовым), а асимптотическим степенным законом распределения вероятностей, который не зависит от экспоненциального поведения, обусловленного распределением Гиббса. Диапазон применения разнообразных неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, специальная и общая теории относительности, стохастическая динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие.

Среди различных деформированных энтропий неэкстенсивных систем особый интерес представляет энтропия Каниадакиса $S_\kappa(p) := -\frac{k_B}{2\kappa}\int\left(p^{\kappa+1} - p^{1-\kappa}\right)d\Gamma$, введенная впервые в работах [21,22]. Основанная на κ - энтропия неэкстенсивная статистика сохраняет математическую и гносеологическую структуру обычной статистической механики и пригодна для описания очень большого класса экспериментально наблюдаемых явлений в физике низких и высоких энергий, а также в естественных, экономических и социальных науках. В частности, деформированная энтропия Каниадакиса объективно возникает в рамках специальной теории относительности Эйнштейна [23]. При этом параметр деформации κ зависит от скорость света c и уменьшается до нуля при $c \to \infty$, восстанавливая таким образом обычную статистическую механику и термодинамику. Статистика Каниадакиса возникает в различных прикладных областях. В качестве примера можно упомянуть работы, связанные с космическими эффектами [22-24] (в частности, с звездной астрофизикой [25], с кварк-глюонной плазмой [26], с газокинетическиими моделями, описывающими взаимодействие атомов и фотонов [27], с квантовой механикой [28].

Представленная работа посвящена конструированию на основе параметрической κ-энтропии статистической термодинамики неэкстенсивных систем. Проведенное исследование базируется на свойствах негиббсового канонического κ-распределения, полученного из принципа Джейнса [29] максимума κ-энтропии при заданности усредненной внутренней энергии системы и вероятностной нормировки для функции κ-распределения. Показано, что все важные термодинамические характеристики системы, такие как энтропия, полная и свободная энергия, внутренняя энергия, физические температура и давление, коэффициенты теплопроводности и т.п. могут быть найдены с использованием только равновесной функции κ-распределения. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру $T_{ph}(p)$ отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт потребовал переопределения ряда термодинамических соотношений, получаемых естественным путем в рамках статистики Каниадакиса. Путем использования обобщенной энтропии Клаузиуса к аномальной κ-системе, был получен наиболее приемлемый набор макроскопических термодинамических соотношений для неэкстенсивной κ-системы. Кроме этого, показано, что сохраняются принцип максимума равновесной энтропии, лежандрова структура теории, термодинамическая устойчивость, теорема Гиббса и *H*- теорема.

Таким образом, в работе с единых позиций изложен круг вопросов, связанных с конструированием деформированной термодинамики на основе κ-энтропии Каниадакиса и дивергенции Брэгмана для сложных аномальных систем.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА ЭНТРОПИИ КАНИАДАКИСА

В деформированной статистической механике Каниадакиса для непрерывных аномальных систем при вероятностной нормировке

$$\int p(\boldsymbol{r})d\Gamma = 1, \qquad 0 \le p(\boldsymbol{r}) < \infty \tag{1}$$

для плотности вероятности распределения систем $p(\boldsymbol{r})$ в фазовом пространстве $\boldsymbol{r} := \{\boldsymbol{q}_1,...,\boldsymbol{q}_N;\ \boldsymbol{p}_1,...,\boldsymbol{p}_N\}$ статистического ансамбля («представляющего» макроскопичес кое состояние системы) деформированная κ-энтропия задаётся следующим функционалом [21,28]

$$S_\kappa(p) := -k_{\mathcal{B}} \int p(\boldsymbol{r}) \frac{p^\kappa(\boldsymbol{r}) - p^{-\kappa}(\boldsymbol{r})}{2\kappa} d\Gamma = -k_{\mathcal{B}} \int \frac{p^{\kappa+1}(\boldsymbol{r}) - p^{1-\kappa}(\boldsymbol{r})}{2\kappa} d\Gamma. \tag{2}$$

Здесь и далее везде область интегрирования совпадает со всем $6N$-мерным фазовым пространством, причем безразмерный элемент фазового пространства $d\Gamma$ записывается в современной форме $d\Gamma := \left\{N!h^{3N}\right\}^{-1} d\boldsymbol{r}$, где $h = 2\pi\hbar$, $k_{\mathcal{B}}$ − постоянные Планка и Больцмана соответственно. Энтропийный индекс κ в определении κ-энтропии (2) представляет собой вещественное число, принадлежащее области $|\kappa| < 1$. Подобная деформация логарифмической функции в выражении для энтропии (по сравнению с энтропией Больцмана−Гиббса $S_{\mathcal{BG}}(p):=-k_{\mathcal{B}}\int p\ln(p)d\Gamma$) позволяет учитывать важную особенность поведения многих аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими силовыми взаимодействиями, когда вероятность реализации $p(\boldsymbol{r})$ малых значений параметров состояния убывает (при $p\to 0^{+}$) не экспоненциально быстро, а степенным образом (закон Парето). Благодаря этому статистика Каниадакиса описывает события, практически недостижимые в простых системах, характеризуемых статистикой Больцмана−Гиббса.

Легко показать, что в пределе слабой связи $\kappa\to 0$ κ-энтропия (2) переходит в каноническую формулу $S_{\mathcal{BG}}$ обычной статистики Больцмана−Гиббса. Действительно, в пределе $\kappa\to 0$ имеем: $p^{\pm\kappa}=\mathrm{e}^{\pm\kappa\ln p}\to 1\pm\kappa\ln p$, и энтропия S_κ сводится к

$$S_{\kappa\to 0}\left(p\right)=\lim_{\kappa\to 0}\left\{-k_{\mathcal{B}}\int p\frac{p^{\kappa}-p^{-\kappa}}{2\kappa}d\Gamma\right\}=-k_{\mathcal{B}}\int p\ln p\,d\Gamma=S_{\mathcal{BG}}.$$

Энтропия Каниадакиса (2) может быть представлена также в следующей эквивалентной форме:

$$S_{\{\kappa\}}(p):=-k_{\mathcal{B}}\int p\ln_{\{\kappa\}}p\,d\Gamma=-k_{\mathcal{B}}\langle\ln_{\{\kappa\}}p\rangle, \tag{3}$$

при написании которой использован так называемый, «деформированный логарифм» [30]

$$\ln_{\{\kappa\}}(x):=\frac{x^{\kappa}-x^{-\kappa}}{2\kappa}\equiv\frac{1}{\kappa}\sinh(\kappa\ln x)\quad(\forall x>0), \tag{4}$$

а также обычное правило получения среднего значения для любой динамической переменой $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$, а именно [31]

$$\langle\mathcal{A}_j\rangle:=\int p(\boldsymbol{r})\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})d\Gamma, \tag{5}$$

где принята нормировка (1).

Отметим, что в дискретном случае, при условии вероятностной нормировки $\sum_{i=1}^{W}p_i=1$, нужно в приведённых выше формулах произвести замену $\int d\Gamma\leftrightarrow\sum_{i=1}^{W}$, где $p:=\left\{p_j\right\}_{j=1,2,\ldots,W}$ − дискретная функция распределения, а число W означает количество доступных в системе микросостояний.

Свойства функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$. Как хорошо известно, в классической статистической механике особую роль играет логарифм функции распределения со знаком минус $(-\ln(p))$), поскольку эта величина связана с энтропией системы. В 1990-х гг. Каниадакис предложил определение деформированного логарифма (4), в котором параметр деформации κ принадлежит интервалу $(-1,1)$, давая в пределе $\kappa\to 0$ обычный логарифм $\ln(x)$. Приведем здесь некоторые наиболее важные свойства деформированного логарифма, которые будут использованы ниже.

Легко убедиться, что функция $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами [22,30]):

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \ln_{\{-\kappa\}}(x)\,, \tag{6}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x^{\lambda}) = \lambda \ln_{\{\lambda\kappa\}}(x)\,, \quad \ln_{\{\kappa\}}(1/x) = -\ln_{\{\kappa\}}(x)\,, \tag{7}$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(0^{+}) = -\infty\,, \quad \ln_{\{\kappa\}}(1) = 0\,, \quad \ln_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty\,, \tag{8}$$

$$d\Big[\ln_{\{\kappa\}}(x)\Big]/dx = x^{-1}u_{\{\kappa\}}(x)\,, \quad d\Big[x\ln_{\{\kappa\}}(x)\Big]/dx = \lambda \ln_{\{\kappa\}}(x/\alpha) = \ln_{\{\kappa\}}(x) + u_{\{\kappa\}}(x)\,. \tag{9}$$

Имеют место также следующие свойства вогнутости функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$:

$$d\Big[\ln_{\{\kappa\}}(x)\Big]/dx > 0\,, \quad d^2\Big[\ln_{\{\kappa\}}(x)\Big]/dx^2 < 0\,, \quad d^2\Big[x\ln_{\{\kappa\}}(x)\Big]/dx^2 > 0\,, \tag{10}$$

а также асимптотическое поведение деформированного логарифма по степенному закону:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to 0^{+}}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|} x^{-|\kappa|}\,, \quad \ln_{\{\kappa\}}(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \frac{1}{|2\kappa|} x^{|\kappa|}\,. \tag{11}$$

Тейлоровское разложение функции $\ln_{\{\kappa\}}(1+x)$ сходится в случае, если $-1 < x \le 1$; в этом случае имеем:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\kappa)(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\,, \tag{12}$$

где $b_n(-\kappa) = b_n(\kappa)$, $b_1(\kappa) = 1$, $b_n(0) = 1$; при $n > 1$ коэффициенты $b_n(\kappa)$ определяются со-отношением:

$$b_n(\kappa) = \frac{1}{2}(1-\kappa)\left(1-\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{\kappa}{n-1}\right) + \frac{1}{2}(1+\kappa)\left(1+\frac{\kappa}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{\kappa}{n-1}\right).$$

Первые три члена разложения (12) принимают вид:

$$\ln_{\{\kappa\}}(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} = x - \frac{x^2}{2} + \left(1+\frac{\kappa^2}{2}\right)\frac{x^3}{3}\,. \tag{13}$$

Для деформированного логарифма $\ln_{\{\kappa\}}(x)$ справедливо также следующее интеграль-ное представление:

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) = \frac{1}{2}\int_{1/x}^{x} \frac{1}{t^{1+\kappa}}dt\,. \tag{14}$$

Наконец, если ввести так называемые κ-сумму и κ-произведение − обобщенную сумму и обобщенное произведение статистики Каниадакиса [32,33]

$$x \overset{\kappa}{\oplus} y := x\sqrt{1+\kappa^2 y^2} + y\sqrt{1+\kappa^2 x^2}\,, \quad (x, y \in \mathbb{R} \text{ и } |\kappa| \le 1),$$

$$x \underset{\kappa}{\otimes} y := \left(\kappa \ln_{\{\kappa\}} x + \kappa \ln_{\{\kappa\}} y + \sqrt{1 + (\kappa \ln_{\{\kappa\}} x + \kappa \ln_{\{\kappa\}} y)^2} \right)^{1/\kappa}, \tag{15}$$

то можно получить еще два важных свойства функции $\ln_{\{\kappa\}}(x)$:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy) = \ln_{\{\kappa\}}(x) \overset{\kappa}{\oplus} \ln_{\{\kappa\}}(y) = \ln_{\{\kappa\}}(x) u_{\{\kappa\}}(y) + \ln_{\{\kappa\}}(y) u_{\{\kappa\}}(x) =$$

$$= \ln_{\{\kappa\}}(x) \sqrt{1 + \kappa^2 \ln_{\kappa}^2(y)} + \ln_{\{\kappa\}}(y) \sqrt{1 + \kappa^2 \ln_{\kappa}^2(x)},$$

$$\ln_{\{\kappa\}}(x) + \ln_{\{\kappa\}}(y) = \ln_{\{\kappa\}} \left(x \underset{\kappa}{\otimes} y \right). \tag{16}$$

Функция $u_{\{\kappa\}}(x)$. В соотношениях (9) и (16), а также далее фигурирует важная в статистике Каниадакиса функция [32,33]

$$u_{\{\kappa\}}(x) := \frac{x^{\kappa} + x^{-\kappa}}{2} = \sqrt{1 + \kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}^2(x)} \equiv \cosh(\kappa \ln(x)), \tag{17}$$

обладающая следующими свойствами (см., например, [34,35]:

$$u_{\{\kappa\}}(x) = u_{\{-\kappa\}}(x), \quad u_{\{\kappa\}}(x) = u_{\{\kappa\}}(1/x), \quad u_{\{\kappa\}}(\alpha) = 1/\lambda, \quad \ln_{\{\kappa\}}(\alpha) = -1/\lambda. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения:

$$\lambda := \sqrt{1 - \kappa^2}, \quad \alpha := \left[(1 - \kappa)/(1 + \kappa) \right]^{1/2\kappa} \tag{19}$$

При учете свойств (18), а также преобразования

$$u_{\{\kappa\}}(x) = \frac{x^{\kappa} + x^{-\kappa}}{2} = \frac{x^{\kappa} - x^{-\kappa}}{2\kappa} - \frac{(1-\kappa)x^{\kappa} - (1+\kappa)x^{-\kappa}}{2\kappa} =$$

$$= \ln_{\{\kappa\}}(x) - \sqrt{1 - \kappa^2} \ln_{\{\kappa\}} \left\{ x \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right)^{1/2\kappa} \right\}, \tag{20}$$

легко получить следующие соотношения:

$$u_{\{\kappa\}}(x) = x^{\kappa} - \kappa \ln_{\{\kappa\}}(x) = \ln_{\{\kappa\}}(x) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}(\alpha x) = -\ln_{\{\kappa\}}(x) - \lambda \ln_{\{\kappa\}}(\alpha / x), \tag{21}$$

$$u_{\{\kappa\}}(xy) = u_{\{\kappa\}}(x) u_{\{\kappa\}}(y) + \kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}(x) \ln_{\{\kappa\}}(y). \tag{22}$$

С учетом (21), закон аддитивности (16) деформированного κ-логарифма может быть переписан следующим образом:

$$\ln_{\{\kappa\}}(xy) = 2 \ln_{\{\kappa\}}(x) \ln_{\{\kappa\}}(y) - \lambda \left\{ \ln_{\{\kappa\}}(y) \ln_{\{\kappa\}}(\alpha x) + \ln_{\{\kappa\}}(x) \ln_{\{\kappa\}}(\alpha y) \right\}. \tag{23}$$

Легко видеть, что в пределе слабой связи $\kappa \to 0$ это свойство κ-логарифма сводится к стандартному закону аддитивности обычного логарифма $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.

Наконец, можно убедиться в том, что имеют место следующие дифференциальные соотношения:

$$\frac{d}{dx} u_{\{\kappa\}}(x) = \kappa^2 \frac{\ln_{\{\kappa\}}(x)}{x}, \quad \frac{d}{dx}\left\{x u_{\{\kappa\}}(x)\right\} = \lambda u_{\{\kappa\}}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \ln_{\{\kappa\}}(x) + u_{\{\kappa\}}(x). \tag{24}$$

Неаддитивность κ-энтропии для независимых систем. Покажем теперь, что подобно энтропии Тсаллиса (см., например, [15,36]), энтропия Каниадакиса подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых систем.

Рассмотрим совокупную физическую κ-систему, состояние которой описывается совместным мультипликативным распределением $p^{(12)} := p^{(1)} \cdot p^{(2)}$, где $p^{(12)} := p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$, $p^{(1)} := p^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)$, $p^{(2)} := p^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)$. Распределение $p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ может зависеть также и от времени, а «точки» $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ относятся к двум статистически независимым κ-системам.

Тогда полная энтропия системы задается выражением

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}} := -k_B \int\int p^{(12)} \ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})\, d\Gamma_1 d\Gamma_2, \tag{25}$$

где выполняются условия нормировки

$$\iint p^{(12)}(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)\, d\Gamma_1 d\Gamma_2 = \int p^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)\, d\Gamma_1 = \int p^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)\, d\Gamma_2 = 1.$$

После подстановки мультипликативного распределения $p^{(12)} = p^{(1)} \cdot p^{(2)}$ в формулу (25) получим (при учете (22)) следующее свойство псевдоаддитивности совокупной энтропии в статистике Каниадакиса для двух независимых систем:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}} = S_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + S_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}), \tag{26}$$

где

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p) := \langle u_{\{\kappa\}}(p) \rangle_\kappa = \int \; p\, u_{\{\kappa\}}(p)\, d\Gamma = \int p \sqrt{1 + \kappa^2 \ln^2_{\{\kappa\}}(p)}\, d\Gamma. \tag{27}$$

Проверим свойство квазиаддитивности (26) совокупной энтропии:

$$S^{(12)}_{\{\kappa\}} \equiv -k_B \int\int p^{(12)} \ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)})\, d\Gamma_1 d\Gamma_2 = -k_B \left\langle \ln_{\{\kappa\}}(p^{(12)}) \right\rangle_{\{\kappa\}} =$$

$$= -k_B \left\langle \ln_\kappa(p^{(1)} p^{(2)}) \right\rangle_{\{\kappa\}} = -k_B \left\langle \ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) u_{\{\kappa\}}(p(1)) \right\rangle_{\{\kappa\}} =$$

$$= -k_B \int\int p^{(1)} \cdot p^{(2)} \left\{ \ln_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + \ln_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) u_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \right\} d\Gamma_1 d\Gamma_2 =$$

$$= S_{\{\kappa\}}(p^{(1)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) + S_{\{\kappa\}}(p^{(2)}) \mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p^{(1)}). \tag{28}$$

В случае если $\kappa \to 0$, то $u_{\{0\}}(p) = 1$ и $\mathcal{I}_{\{0\}}(p) = 1$, так что из (26) следует аддитивное правило для классической энтропии Больцмана−Гиббса.

Отметим, что с учетом соотношения (21) функцию $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p)$ можно записать в другом виде:

$$\mathcal{I}_{\{\kappa\}}(p) = \langle \ln_\kappa(p) \rangle - \lambda \langle \ln_\kappa(\alpha p) \rangle = \frac{1}{k_{\mathcal{B}}}\Big[-\lambda\alpha S_{\{\kappa\}}(p/\alpha) + S_{\{\kappa\}}(p)\Big]. \tag{29}$$

Тогда для совокупной энтропии Каниадакиса двух независимых систем получим еще одно представление:

$$k_{\mathcal{B}} S^{(12)}_{\{\kappa\}} = S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\Big\{\lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(2)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\Big\} + S_{\{\kappa\}}(p^{(2)})\Big\{\lambda S_{\{\kappa\}}(\alpha p^{(1)}) - S_{\{\kappa\}}(p^{(1)})\Big\} \tag{30}$$

2. КАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА В ДЕФОРМИРОВАННОЙ κ-СТАТАТИСТИКЕ КАНИАДАКИСА

Основные свойства экспоненты Каниадакиса $\exp_{\{\kappa\}}(x)$. Далее нам понадобится так называемая экспонента Каниадакиса. Для определения функции, обратной деформированному логарифму (2), введем переменную $x \equiv \ln_{\{\kappa\}}(y)$, что приводит к алгебраическому уравнению $z^2 - 2x\kappa z - 1 = 0$ для неизвестной $z \equiv y^\kappa$. Его решение $z = \kappa x \pm \sqrt{1+(\kappa x)^2}$ дает выражение $y = \left\{\kappa x \pm \sqrt{1+(\kappa x)^2}\right\}^{1/\kappa}$. Функция y обратная деформированному логарифму $x = \ln_{\{\kappa\}}(y)$, представляет собой, так называемую, экспоненту Каниадакиса:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x) := \left(\sqrt{1+(\kappa x)^2} + \kappa x\right)^{1/\kappa} \equiv \exp\left(\frac{1}{\kappa}\operatorname{arcsinh}\kappa x\right) \in C^\infty(\mathbb{R}), \tag{31}$$

Из определения (31) экспоненты Каниадакиса вытекают следующие свойства [32,33]:

$$\exp_{\{0\}}(x) = \lim_{\kappa\to 0}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp(x), \quad \exp_{\{\kappa\}}(0) = 1, \quad \exp_{\{-\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}}(x),$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(-\infty) = 0^+, \quad \exp_{\{\kappa\}}(+\infty) = +\infty, \quad \ln_{\{\kappa\}}\exp_{\{\kappa\}}(x) = \exp_{\{\kappa\}}\ln_{\{\kappa\}}(x) = x,$$

$$u_{\{\kappa\}}\left\{\exp_{\{\kappa\}}(x)\right\} = \sqrt{1+\kappa^2 x^2}, \quad \exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(-x) = 1. \tag{32}$$

Кроме того, функция $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ обладает следующими свойствами:

$$(\exp_{\{\kappa\}}(x))^r = \exp_{\{\kappa/r\}}(rx) \tag{33}$$

(с $r \in \mathbb{R}$, которое в пределе слабой связи $\kappa \to 0$ воспроизводит известное свойство обыкновенной экспоненты),

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\exp_{\{\kappa\}}(y)=\exp_{\{\kappa\}}(x\overset{\kappa}{\oplus}y)=\exp_{\{\kappa\}}\left\{x\sqrt{1+\kappa^2y^2}+y\sqrt{1+\kappa^2x^2}\right\},$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x+y)=\exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{\kappa}{\otimes}\exp_{\{\kappa\}}(y)\,. \tag{34}$$

Из (18) следует следующее правило дифференцирования экспоненты Каниадакиса:

$$\frac{d}{dx}\exp_{\{\kappa\}}(x)=\frac{\exp_{\{\kappa\}}(x)}{u_{\{\kappa\}}\left\{\exp_{\{\kappa\}}(x)\right\}}=\frac{1}{\sqrt{1+\kappa^2x^2}}\exp_{\{\kappa\}}(x)\,. \tag{35}$$

Имеет место следующее свойство выпуклости:

$$d^2\left[\exp_{\{\kappa\}}(x)\right]/\,dx^2>0,\quad x\in\mathbb{R},\quad \kappa^2<1\,. \tag{36}$$

Безусловно, одним из наиболее важных свойств функции $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ является ее и асимптотическое поведение по степенному закону:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\left|2\kappa x\right|^{\pm 1/|\kappa|}, \tag{37}$$

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}-\left|2\kappa\right|^{-1}x^{-|\kappa|},\quad \exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\left|2\kappa\right|^{-1}x^{|\kappa|}. \tag{38}$$

Разложение Тейлора экспоненты $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ имеет следующий вид [35]:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\xi_n(\kappa)\frac{x^n}{n!},\quad \kappa^2x^2<1, \tag{39}$$

где $\xi_0(\kappa)=\xi_1(\kappa)=\xi_2(\kappa)=1,\quad \xi_n(\kappa)=\prod_{j=1}^{n-1}\left[1-(2j-n)\kappa\right]$. Заметим, что первые три члена в разложении Тейлора κ-экспоненты точно такие, как и для обычной экспоненты:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)\underset{x\to 0}{\sim}=1+x+\frac{x^2}{2}+(1-\kappa^2)\frac{x^3}{3!}\,. \tag{39*}$$

Экспоненту $\exp_{\{\kappa\}}(x)$ можно также записать как бесконечное произведение обыкновенных экспонент [30]:

$$\exp_{\{\kappa\}}(x)=\prod_{n=0}^{\infty}\exp(c_n\kappa^{2n}x^{2n+1}),\quad c_n:=\frac{(-1)^n(2n)!}{(2n+1)2^{2n}(n!)^2}\,. \tag{40}$$

Наконец, для κ-экспоненты справедливы интегральные соотношения [23]:

$$\exp_{\{\kappa\}}(-x)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\kappa s}J_{1/\kappa}\left(\frac{s}{\kappa}\right)\exp(-sx)ds\,,\quad \operatorname{Re}x\geq 0\,, \tag{41}$$

$$M_{\{\kappa\}}(r) := \int_0^\infty x^{r-1} \exp_{\{\kappa\}}(-x)dx = \frac{|2\kappa|^{-r}}{1+|\kappa| r} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} - \frac{r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{|2\kappa|} + \frac{r}{2}\right)} \Gamma(r), \tag{42}$$

где $0 < r < 1/|\kappa|$; $J_\nu(s)$ − функция Бесселя, $\Gamma(x)$ − Гамма- функция. Из (42) легко получить выражение $M_{\{\kappa\}}(r+2) = \dfrac{r(r+1)}{1-\kappa^2(r+2)^2} \cdot M_{\{\kappa\}}(r)$.

Деформированное каноническое распределение. Равновесные состояния сложных κ -систем характеризуются распределениями, которые не меняются с течением времени. Каноническое распределение Гиббса в статистике Каниадакиса может быть получено, как и в классическом случае, из «экстремизации» κ -энтропии (4) при выполнении следующих дополнительных условий: заданности средней энергии системы

$$\mathcal{E}_{\{\kappa\}} := \langle \mathcal{H} \rangle_{\{\kappa\}} = \int p(\boldsymbol{r}) \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) d\Gamma = const \tag{43}$$

и сохранения вероятностной нормировки (1) распределения $p(\boldsymbol{r})$. Здесь $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{r})$ − функция Гамильтона, которая определяется математической моделью изучаемых физических процессов в системе. Заметим, что в общем случае эта функция может зависеть от ряда внешних параметров $a_1, a_2, ... a_s$, макроскопически характеризующих состояние статистического равновесия рассматриваемого ансамбля аномальных динамических систем, $\mathcal{H} := \mathcal{H}(\boldsymbol{r}, \{a_j\})$ [31].

Согласно вариационному принципу Джейнса [29] определим функционал

$$\mathcal{L}(p) := -k_{\mathcal{B}} \int p(\boldsymbol{r}) \ln_\kappa p(\boldsymbol{r}) d\Gamma - \beta \int p(\boldsymbol{r}) \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) d\Gamma - k_{\mathcal{B}} \gamma \int p(\boldsymbol{r}) d\Gamma \tag{44}$$

и найдём его безусловный экстремум. Здесь β и γ суть множители Лагранжа. В соответствии с теоремой Лагранжа вероятностное распределение $p(\boldsymbol{r})$, «экстремирующее» κ -энтропию $S_\kappa(p)$ при указанных ограничениях, определяется из условия:

$$\frac{\delta \mathcal{L}(p)}{\delta p} = -k_{\mathcal{B}} \int \left[\ln_{\{\kappa\}} \left(p(\boldsymbol{r})\right) + u_{\{\kappa\}}\left(p(\boldsymbol{r})\right) \right] d\Gamma - \beta \int \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) d\Gamma - k_{\mathcal{B}} \gamma \int d\Gamma = 0. \tag{45}$$

При написании (45) использовано соотношение (9). Из (35), с учетом (19), (21) и (33), следует уравнение

$$\ln_{\{\kappa\}} \left(\alpha / p(\boldsymbol{r})\right) - \frac{1}{\lambda} \left[\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right] = 0, \quad \lambda := \sqrt{1-\kappa^2}, \quad \alpha = \exp_{\{\kappa\}}(-1/\lambda), \tag{46}$$

решение которого дает следующее нормированное κ -распределение $p^{eq}(\boldsymbol{r})$ в состоянии статистического равновесия системы (аналог канонического распределения Гиббса в статистике Каниадакиса)

$$p^{eq}(\boldsymbol{r},\beta)=\alpha\,/\,\exp_{\{\kappa\}}\left\{\frac{1}{\lambda}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right)\right\}=\alpha\exp_{\{\kappa\}}\left\{-\frac{1}{\lambda}\left(\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right)\right\}. \tag{47}$$

Следует отметить, что в пределе слабой связи $\kappa\to 0$ это распределения сводится к каноническому распределению Гиббса классической статистики.

С учетом свойств (16) и (34) распределение (47) можно записать в другом виде [37]:

$$p^{eq}(\boldsymbol{r})=\exp_{\{\kappa\}}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\exp_{\{\kappa\}}\left(-\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda}\right)=$$

$$=\exp_{\{\kappa\}}\left[-\left(\frac{1}{\lambda}\right)\overset{\kappa}{\oplus}\left(-\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda}\right)\right]=\exp_{\{\kappa\}}\left[-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\mathcal{X}(\boldsymbol{r})}{\lambda}+\sqrt{1+\kappa^2\frac{\mathcal{X}^2(\boldsymbol{r})}{\lambda^2}}\right)\right]=$$

$$=\exp_{\{\kappa\}}\left[-u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\mathcal{X})\right)-\mathcal{X}\right], \tag{48*}$$

где, в силу (22) и (48), имеем

$$u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right)=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\kappa^2}{\lambda}\mathcal{X}(\boldsymbol{r})+\sqrt{1+\frac{\kappa^2}{\lambda^2}\mathcal{X}^2(\boldsymbol{r})}\right),\quad \mathcal{X}(\boldsymbol{r}):=\gamma+\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}).$$

Заметим также, что хвост распределения (48) описывается степенной асимптотикой (это так называемый закон Парето), определяемой в силу (37) выражением $p^{eq}\underset{\mathcal{X}\to\infty}{\sim}\left|2\kappa\mathcal{X}/\sqrt{1-\kappa^2}\right|^{1/\kappa}$, которое существенно отличается от экспоненциальной асимптотики обычного распределения Больцмана−Гиббса [10,31].

Найдем теперь вторую вариацию функционала (44). В результате получим

$$\delta^2\mathcal{L}(p)=-k_{\mathcal{B}}\int\frac{1}{p}\left[\kappa^2\ln_{\{\kappa\}}(p)+u_{\{\kappa\}}(p)\right]\delta p^2\,d\Gamma=-k_{\mathcal{B}}\kappa^2\int\left[\kappa+\frac{p^{2\kappa}+1}{p^{2\kappa}-1}\right]\delta p^2\,d\Gamma.$$

Легко убедиться в том, что экстремум соответствует максимуму и минимуму рассматриваемого функционала, соответственно, при $0<\kappa<1$ $(\delta^2\mathcal{L}<0)$ и $-1<\kappa<0$ $(\delta^2\mathcal{L}>0)$. Таким образом, распределение (48) максимизирует или минимизирует энтропию Каниадакиса.

В заключение этого раздела заметим, что в неэкстенсивной статистической кинетике, также как и в классической кинетике имеет место термодинамическая эквивалентность статистических ансамблей. Все ансамбли статистической механики определяются заданием внешних условий, в которых находятся системы, их составляющие. Например, канонический ансамбль Гиббса определяется постоянством числа частиц, объема и контактом с термостатом, большой канонический ансамбль Гиббса − постоянством объема, контактом с термостатом и резервуаром частиц, изобарически-изотермический ансамбль − постоянством числа частиц, давления и контактом с термостатом. Вместе с тем, при выборе ансамбля обычно руководствуются удобством вычислений, а не условиями, в которых находится система, поскольку, как было доказано в ряде работ (см., например, [31]), вычисленные с их помощью термодинамические функции мало отличаются между собой и совпадают в термодинамическом пределе

3.ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Приступим теперь к конструированию равновесной термодинамики, основанной на неэкстенсивной статистике Каниадакиса. Используя распределение (48*), получим следующее выражение:

$$\ln_{\{\kappa\}}(p^{eq}(\boldsymbol{r})) + u_{\{\kappa\}}(p^{eq}(\boldsymbol{r})) + \gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{49}$$

(заметим, что это выражение может быть получено также путем преобразования свойства (16), в котором $x := p^{eq}(\boldsymbol{r})$ и $y := 1/\alpha$, если использовать при этом формулы (7), (19) и (48)).

Усредняя выражение (49) с помощью распределения $p^{eq}(\boldsymbol{r})$ и учитывая определения (27) и (43), в результате получим равновесное значение энтропии Каниадакиса [35]

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} = k_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}\ . \tag{50}$$

При сравнении κ-энтропии (50) с ее классической версией ($\kappa\to 0$, $\mathcal{I}^{eq}_{\{0\}} = 1$), естественно определить аналог $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ классического статистического интеграла $\mathcal{Z}$ соотношением [36]):

$$k_{\mathcal{B}}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) := k_{\mathcal{B}}(\mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma) + \beta\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}. \tag{51}$$

Далее везде будем опускать метку "eq" у термодинамических параметров, когда это не вызывает неопределенности. Тогда по аналогии с обычной статистикой Больцмана–Гиббса выражение (50) принимает вид:

$$S^{eq}_{\{\kappa\}} := k_{\mathcal{B}}\ln_{\{\kappa\}}\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}\ , \tag{52}$$

откуда следует, что $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \left(\kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_{\mathcal{B}} + \sqrt{1 + \kappa S^{eq}_{\{\kappa\}}/k_{\mathcal{B}}}\right)^{1/\kappa}$.

Продифференцируем теперь логарифм $\ln_{\{\kappa\}}\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ по β. Используя определение (27) функции $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}$, а также соотношения (9), (21) и (49), в результате получим:

$$\frac{d}{d\beta}\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) = \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \frac{d}{d\beta}\int u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right)p^{eq}(\boldsymbol{r})d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \int \left\{ u_{\{\kappa\}}(p^{eq}) \frac{dp^{eq}}{d\beta} + p^{eq} \frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{d\beta} \right\} d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \frac{\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} + \int \left\{ u_{\{\kappa\}}(p^{eq}) \frac{dp^{eq}}{d\beta} - p^{eq} \frac{d}{d\beta} \left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) - u_{\{\kappa\}}(p^{eq}) \frac{dp^{eq}}{d\beta} \right\} d\Gamma =$$

$$= \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta} + \frac{\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{k_{\mathcal{B}}} - \int p^{eq} \frac{d}{d\beta} \left(\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) d\Gamma = \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \frac{d\mathcal{E}^{eq}_{\{\kappa\}}}{d\beta}. \tag{53}$$

Следовательно, для энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ справедливо термодинамическое уравнение

$$\beta \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta} = k_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\beta} \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{54}$$

Если продифференцировать экстремальное значение κ-энтропии $S_{\{\kappa\}}(p^{eq})$ по $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ и учесть (9), (21) и (47), то в результате получим аналог известного соотношения равновесной термодинамики:

$$\frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} = -k_{\mathcal{B}} \int \frac{d\left[p^{eq}(\boldsymbol{r}) \ln_{\{\kappa\}} p^{eq}(\boldsymbol{r}) \right]}{dp^{eq}(\boldsymbol{r})} \frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} d\Gamma =$$

$$= -k_{\mathcal{B}} \int \frac{d\left[\ln_{\{\kappa\}} p^{eq}(\boldsymbol{r}) + u_{\{\kappa\}}\left(p^{eq}(\boldsymbol{r})\right) \right]}{dp^{eq(\boldsymbol{r})}} \frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} d\Gamma = -k_{\mathcal{B}} \lambda \int \ln_{\{\kappa\}} \left(\frac{p^{eq}(\boldsymbol{r})}{\alpha} \right) \frac{dp^{eq}(\boldsymbol{r})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} d\Gamma =$$

$$= k_{\mathcal{B}} \lambda \int \left(\frac{\gamma + \beta k_{\mathcal{B}}^{-1} \mathcal{H}(\boldsymbol{r})}{\lambda} \right) \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} d\Gamma = \beta. \tag{55}$$

Здесь использованы условия $\int dp^{eq} d\Gamma = 0$ и $\int \mathcal{H}(\boldsymbol{r})\, dp^{eq}(\boldsymbol{r})\, d\Gamma = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$.

Определим теперь деформированную свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_{\{\kappa\}}$ выражением

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}} := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}), \tag{56}$$

которое при $\kappa \to 0$ совпадает со свободной энергией обычной статистики $\mathcal{F} := \mathcal{E} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \ln \mathcal{Z}$. Тогда из (52), (54) и (56) вытекают искомые дифференциальные соотношения деформированной термостатики Каниадакиса:

$$S_{\{\kappa\}} = k_{\mathcal{B}} \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}), \quad \mathcal{F}_{\{\kappa\}} \equiv \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{1}{\beta} S_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}),$$

$$\beta = \frac{dS_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}} = k_{\mathcal{B}} \frac{d\ln_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}})}{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}, \quad \beta \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta} = k_{\mathcal{B}} \frac{d}{d\beta} \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}, \quad \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \mathcal{F}_{\{\kappa\}})}{d\beta}. \tag{57}$$

Усреднение микроскопических динамических величин. Важно отметить, что введенный выше статистический интеграл $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$ определяется относительно внутренней энергии $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ системы (см. (51)). Однако часто удобнее использовать другое определение $\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}$, задаваемое выражением [35]

$$\ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} := \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}}^{-1} \beta \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma. \tag{58}$$

Здесь величина $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$ не зависит от выбора нуля энергии, а при условии $\kappa \to 0$ формула (58) обращается в хорошо известное в статистике Больцмана−Гиббса соотношение для статистического интеграла $\ln \mathcal{Z} = 1 + \gamma$. В этом случае, уравнения равновесной термодинамики (50) принимают почти классическую форму

$$S_{\{\kappa\}} = \beta\left(\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}\right), \quad dS_{\{\kappa\}} = \beta\, d\mathcal{E}_{\{\kappa\}},$$

$$\ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta} \ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}, \quad \mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \frac{d(\beta \ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}})}{d\beta}, \quad C_{\{\kappa\}} = -\beta^2 \frac{d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{d\beta}. \tag{59}$$

С помощью деформированного канонического распределения Гиббса (47) можно вычислить также среднее значение любой динамической переменной $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$. Дифференцируя для этого логарифм статистического интеграла $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$ по микроскопической энергии $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{r})$ и учитывая (49), в результате получим:

$$\frac{d}{d\mathcal{H}} \ln_{\{\kappa\}} \ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} = \frac{d}{d\mathcal{H}}\left(\mathcal{I}_{\{\kappa\}} + \gamma\right) = \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \frac{d}{dp^{eq}}\left[p^{eq} u_{\{\kappa\}}(p^{eq})\right] \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}} d\Gamma =$$

$$= \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \left(u_{\{\kappa\}}(p^{eq}) + p^{eq} \frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}} \right) \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}} d\Gamma =$$

$$= \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \left(-p^{eq} \frac{d}{dp^{eq}} \left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) \right) \frac{dp^{eq}}{d\mathcal{H}} d\Gamma =$$

$$= \frac{d\gamma}{d\mathcal{H}} + \int \left(-p^{eq} \frac{d}{d\mathcal{H}} \left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} \mathcal{H}(\boldsymbol{r}) \right) \right) d\Gamma = -\frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}} p^{eq}. \tag{60}$$

При выводе этого выражения было использовано преобразование

$$\frac{du_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{dp^{eq}} = -\frac{u_{\{\kappa\}}(p^{eq})}{p^{eq}} - \frac{d}{dp^{eq}}\left(\gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r})\right),$$

полученное с учетом соотношения (49) и формулы $d(\ln_{\{\kappa\}} x)/dx = x^{-1}u_{\{\kappa\}}x$.

Таким образом, зная κ-свободную энергию Гельмгольца $\mathcal{F}_\kappa$, можно вычислить равновесную функцию распределения по формуле

$$p^{eq}(\boldsymbol{r}) = -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\frac{d}{d\mathcal{H}}\ln_{\{\kappa\}}\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}} = \frac{d\ddot{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{H}}. \tag{61}$$

Отсюда следует, что усредненные значения микроскопических динамических переменных $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$ могут быть найдены при использовании функций $\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}$, или $\mathcal{F}_\kappa$ следующим образом:

$$\langle\mathcal{A}_j\rangle = \int p^{eq}(\boldsymbol{r})\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})d\Gamma = -\frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\int\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})\frac{d}{d\mathcal{H}}\left[\ln_{\{\kappa\}}\left(\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}\right)\right]d\Gamma = \int\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})\frac{d\ddot{\mathcal{F}}_\kappa}{d\mathcal{H}}d\Gamma \tag{62}$$

Выше было отмечено, что для систем, находящихся в состоянии статистического квазиравновесия, функция Гамильтона $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\})$ может зависеть от ряда внешних параметров $a_1, a_2, \ldots a_s$, которые можно рассматривать как обобщенные координаты данной системы. По аналогии с классической статистикой определим обобщенные силы $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$ соотношением [31]

$$\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r}) = -d\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\})/d\,a_j. \tag{63}$$

Тогда, наблюдаемые значения обобщенных сил $\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})$, равные среднему значению по равновесному статистическому ансамблю, могут быть вычислены следующим образом:

$$\langle\mathcal{A}_j\rangle = \int\mathcal{A}_j(\boldsymbol{r})p^{eq}(\boldsymbol{r})d\Gamma = -\int\frac{d\mathcal{H}(\boldsymbol{r},\{a_j\})}{d\,a_j}p^{eq}(\boldsymbol{r})d\Gamma =$$

$$= \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\int\frac{d\mathcal{H}}{da_j}\frac{d\ln_{\{\kappa\}}\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}}{d\mathcal{H}}d\Gamma = \frac{k_{\mathcal{B}}}{\beta}\int\frac{d\ln_{\{\kappa\}}\ddot{\mathcal{Z}}_{\{\kappa\}}}{da_j}d\Gamma = -\frac{d\ddot{\mathcal{F}}_\kappa}{da_j}. \tag{64}$$

4. УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ И ЗАКОН КОМПОЗИЦИИ ЭНЕРГИИ ДЛЯ СИСТЕМ С ЭНТРОПИЕЙ КАНИАДАКИСА

Нахождение условия термодинамического равновесия двух независимых систем требует привлечения законов композиции для энтропий и энергий. В статистической термодинамике Больцмана−Гиббса эти законы имеют свойство аддитивности. Для неэкстенсивной κ-системы энтропия обладает свойством псевдоаддитивности (26), которое в данной работе не распространяется на энергии. Покажем, что это обстоятельство приводит к равенству так называемых физических температур для двух независимых κ-систем, при условии усреднения физических величин равновесным нормированным распределением.

Физическая температура. Начиная с работы [37]), в литературе имеет место дискуссия по способу усреднения функции Гамильтона $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\boldsymbol{r})$ и, соответственно, по выбору закона композиции усредняемых энергий двух независимых κ-систем. Далее предполагается выполнимость закона аддитивность для функции Гамильтона:

$$\mathcal{H}^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\mathcal{H}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)+\mathcal{H}^{(2)}(\boldsymbol{r}_2),$$

который приводит к следующему закону аддитивности усреднённой энергии совокупной системы:

$$\mathcal{E}_\kappa^{(12)}=\mathcal{E}_\kappa^{(1)}+\mathcal{E}_\kappa^{(2)}, \tag{65}$$

где

$$\mathcal{E}_\kappa^{(12)}=\iint p^{eq}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\mathcal{H}^{(12)}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_1 d\Gamma_2,$$

$$\mathcal{E}_\kappa^{(1)}=\int p^{eq}(\boldsymbol{r}_1)\mathcal{H}^{(1)}(\boldsymbol{r}_1)d\Gamma_2 \quad \mathcal{E}_\kappa^{(2)}=\int p^{eq}(\boldsymbol{r}_2)\mathcal{H}^{(2)}(\boldsymbol{r}_2)d\Gamma_2. \tag{66}$$

Варьирование условия аддитивности (65) для энергии $\mathcal{E}_\kappa^{(12)}$ и условия квазиаддитивности (28) для совокупной энтропии $S_\kappa^{(12)}=S_{\{\kappa\}}^{(1)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}$ замкнутой равновесной системы с постоянными значениями энергии $\mathcal{E}_\kappa^{(12)}=const$ и энтропии $S_\kappa^{(12)}=const$ приводит к равенствам:

$$\delta\mathcal{E}_\kappa^{(12)}=\delta\mathcal{E}_\kappa^{(1)}+\delta\mathcal{E}_\kappa^{(2)}=0, \tag{67}$$

$$\delta S_\kappa^{(12)}=\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}+S_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}+\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}+S_{\{\kappa\}}^{(2)}\delta\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}=0. \tag{68}$$

В итоге, учитывая формулу (50) для экстремального значения κ-энтропии, записанную с учетом (57) в виде

$$S_{\{\kappa\}}^{(r)}=k_{\mathcal{B}}\left(\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(r)}+\gamma_r\right)+\left[\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}\right]\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}, \quad (r=1,2), \tag{69}$$

получим условие

$$\left[\delta S_{\{\kappa\}}^{(1)}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(1)}\right]/\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(1)}=\left[\delta S_{\{\kappa\}}^{(2)}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(2)}\right]/\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(2)}, \quad \text{где} \quad \delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}=\beta^{(r)}, \quad (r=1,2). \tag{70}$$

Равенство (70) удовлетворяется тождественно только при равенстве так называемых физических температур

$$T_{ph}^{(r)}=\frac{\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{(r)}}{\delta S_{\{\kappa\}}^{(r)}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{(r)}}, \quad \text{где} \qquad \delta S_{\{\kappa\}}/\delta\mathcal{E}_{\{\kappa\}}=\beta\equiv 1/T \tag{71}$$

для двух независимых κ-систем при их тепловом контакте.

Отношение эквивалентности (71) является обобщением нулевого закона термодинамики на неэкстенсивные κ-системы, описываемые статистикой Каниадакиса. Оно показывает, что в отличие от классического случая физическая температура T_{ph} не является обратной величиной β^{-1} множителя Лагранжа, но определяется соотношением $T_{ph}(p) \equiv \mathcal{I}_{\{\kappa\}} / \beta$. Если $\kappa = 0$, то $T_{ph} \equiv T$ и законы композиции всех средних и микроскопических величин становятся аддитивными. Подчеркнём важный факт, что температуры $T = 1/\beta$ и $T_{ph} \equiv \mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}} / \beta$ не зависят от выбора нуля энергий, и поэтому они допускают физическую интерпретацию.

Физическое давление. По аналогии с физической температурой T_{ph}, можно ввести и физическое давление P_{qh}. Для этой цели рассмотрим механическое равновесие двух независимых κ-систем, представляющих собой совокупную замкнутую систему с постоянными значениями энтропии $S^{(12)}_{\{\kappa\}} = const$ и объёма $V^{(12)} = V^{(1)} + V^{(2)} = const$. В этом случае необходимо находить экстремум энтропии $S^{(12)}_{\{\kappa\}}$ с учетом фиксации общего объёма $V^{(12)}$; в результате этой процедуры получим, что

$$\left[\delta S^{(1)}_{\{\kappa\}} / \delta V^{(1)}\right] / \mathcal{I}^{(1)}_{\{\kappa\}} = \left[\delta S^{(2)}_{\{\kappa\}} / \delta V^{(2)}\right] / \mathcal{I}^{(2)}_{\{\kappa\}} = P_{ph} / T_{ph}, \tag{72}$$

где P_{ph} – так называемое физическое давление, которое определяется соотношением

$$P_{ph} := T_{ph}\left[\delta S^{eq}_{\{\kappa\}} / \delta V\right] / \mathcal{I}^{eq}_{\{\kappa\}}. \tag{73}$$

Таким образом, предполагая аддитивный закон энергетического и механического взаимодействия между двумя микроскопическими системами, управляемыми одной и той же неаддитивной κ-энтропией, можно определить физические макроскопические переменные (температуру и давление), отвечающие нулевому принципу термодинамики в контексте неэкстенсивной статистической механики Каниадакиса.

В связи с введением в рассмотрение температуры T_{ph} сделаем следующее общее замечание. В большинстве сложных неэкстенсивных систем важную роль играют длинномасштабные пространственно-временные корреляции в фазовом или геометри-ческом пространстве. Это означает, в частности, что существенное значение имеет та часть внутренней энергии системы, которая связана с силовым взаимодействием отдалённых друг от друга её частей, а именно потенциальная энергия. В классической статистической механике внутренняя энергия определяется, как правило, суммой кинетических энергий всех молекул совокупной системы. В такой системе «тепловой баланс» достигается в основном за счёт локального теплообмена между близко расположенными (в частности, в пограничных областях) её составляющими, т.е. «тепло» связано с передачей кинетической энергии отдельными частицами системы. Поскольку физическая температура T_{ph} отвечает за «глобальный тепловой баланс» между различными частями системы, то её энергетический баланс будет сильно отличаться от локального теплового баланса. Локальный тепловой баланс описывается абсолютной температурой $\beta = 1/T$, измеряемой термометром. Однако подобное измерение физической температуры T_{ph} нереально, что связано с наличием функционального коэффициента, $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq}$ зависящего, согласно (27), от параметра деформации κ системы, $\mathcal{I}_{\{\kappa\}}^{eq} = \int p^{eq}\sqrt{1+\kappa^2 \ln_{\{\kappa\}}^2 (p^{eq})}d\Gamma$.

Важно иметь в виду, что такое переопределение температуры в κ-статистике расходится с основным принципом классической термодинамики, в которой абсолютная температура T является интенсивным параметром, а не функционалом $T_{ph}(p)$. Этот факт требует модификации термостатических соотношений (57) и (58), включая переопределение энтропии Клаузиуса, с учетом использования физической температуры.

5. МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕРМОСТАТИКА

В качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт построения модифицированной макроскопической термодинамики Тсаллиса, работе [38], были выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Используем этот подход и при разработке макроскопической термодинамики в рамках статистики Каниадакиса на основе энтропии Клаузиуса.

Рассмотрим с этой целью структуру преобразования Лежандра. Уравнение (55) $\beta = dS_{\{\kappa\}} / d\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ указывает на то, что параметры β и $\mathcal{E}_{\{\kappa\}}$ образуют пару переменных Лежандра. Это привело к следующему определению свободной энергии Гельмгольца (изохорно-изотермического потенциала) (см.(57)):

$$\mathcal{F}_{\{\kappa\}}(T) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - TS_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T \ln_{\{\kappa\}} \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{74}$$

Однако, это определение является неудовлетворительным с точки зрения макроскопической термодинамики. Свободная энергия должна зависеть от физической температуры T_{ph}, а не от переменной $T := 1/\beta$.

Физическая свободная энергия Гельмгольца. По аналогии с подходом, предложенном в работе [39] при модификации первого закона термодинамики в статистике Тсаллиса, переопределим макроскопическую κ-свободную энергию (74) следующим образом:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}(T_{ph}) := \mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} T_{ph} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}}, \tag{75}$$

что отличается от соответствующего выражения в традиционной термодинамике. Используя соотношения (51), (52) и (71), можно убедиться, что переопределённая таким образом свободная энергия $\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}$ является функцией T_{ph}. Дифференцируя функцию $\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}$, в результате получим

$$d\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = d\,\mathcal{E}_{\{\kappa\}} - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}}. \tag{76}$$

При написании (76) использовано выражение

$$d\ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} = \left[k_{\mathcal{B}} u_{\{\kappa\}}(\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}) \right]^{-1} dS_{\{\kappa\}} = k_{\mathcal{B}}^{-1} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}}\,, \tag{77}$$

полученное с учетом соотношений (9), (21) и (52). Здесь введено обозначение $w_{\{\kappa\}} := 1/\sqrt{1+\left(\kappa S_{\{\kappa\}}^{eq}/k_{\mathcal{B}}\right)^2}$ для весовой функции.

Энтропия Клаузиуса. Если теперь использовать первый закон термодинамики

$$d'Q_{\{\kappa\}} = d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph} dV\,, \tag{78}$$

где $Q_{\{\kappa\}}$ − количество теплоты, подводимое к термодинамической κ -системе (или отводимое от нее), то (76) можно переписать в виде

$$d\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} - P_{ph} dV - k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - T_{ph} w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}} \tag{79}$$

Отсюда следует, переопределение термодинамической энтропии Клаузиуса $\tilde{S}_{\{\kappa\}}$ для неаддитивных систем:

$$d\tilde{S}_{\{\kappa\}} = d'Q_{\{\kappa\}} / T_{ph}\,. \tag{80}$$

где

$$d\tilde{S}_{\{\kappa\}} = w_{\{\kappa\}} dS_{\{\kappa\}} = \frac{dS_{\{\kappa\}}}{\sqrt{1+\left(\kappa S_{\{\kappa\}}^{eq}/k_{\mathcal{B}}\right)^2}}\,.$$

Введем теперь следующие характеристические функции: обобщённую энтальпию $H_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}} + P_{ph} V$ и обобщённый термодинамический потенциал $G_{\{\kappa\}} = \mathcal{F}_{\{\kappa\}} + P_{ph} V$. Напомним, что все характеристические функции обладают следующим свойством: если известна характеристическая функция, выраженная через соответствующие переменные (свои для каждой функции), то с ее помощью можно вычислить любую термодинамическую величину. В этом нетрудно убедиться из уравнений

$$d\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = T_{ph} w_{\{\kappa\}} d\tilde{S}_{\{\kappa\}} - P_{ph} dV\,, \tag{81}$$

$$dH_{\{\kappa\}} = T_{ph} w_{\{\kappa\}} d\tilde{S}_{\{\kappa\}} + V dP_{ph}\,, \tag{82}$$

$$d\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} - P_{ph} dV\,, \tag{83}$$

$$dG_{\{\kappa\}} = -k_{\mathcal{B}} \ln \mathcal{Z}_{\{\kappa\}} dT_{ph} + P_{ph} dV\,, \tag{84}$$

из которых вытекают следующие обобщённые термодинамические соотношения:

$$\left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}}=\left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}}{\partial V}\right)_{T_{ph}}=-P_{ph},\quad \left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}\right)_{V}=\left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}\right)_{P_{ph}}=T_{ph}, \tag{85}$$

$$\left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{\tilde{S}_{\{\kappa\}}}=\left(\frac{\partial G_{\{\kappa\}}}{\partial P_{ph}}\right)_{T_{ph}}=V,\quad \left(\frac{\partial\tilde{\mathcal{F}}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}=\left(\frac{\partial\mathcal{G}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}=k_{\mathcal{B}}\ln\mathcal{Z}_{\{\kappa\}}. \tag{86}$$

Уравнение для теплоёмкостей. Как известно, в классической термодинамике теплоёмкость вещества в наиболее общем виде определяется соотношением: $C_\gamma := T\left(\partial S/\partial T\right)_\gamma$. Здесь C_γ − теплоёмкость процесса, в котором сохраняется постоянным параметр γ − любая обобщенная координата. Наиболее распространёнными являются изобарная теплоёмкость и изохорная теплоёмкость, которые в рассматриваемом случае определим соотношениями:

$$C_p := T_{ph}\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}},\qquad C_V := T_{ph}\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{V}. \tag{87}$$

Так как в соответствии с формулой $\left(\partial y/\partial x\right)_z=\left(\partial y/\partial u\right)_z\left(\partial u/\partial x\right)_z$ (справедливой для случая двух переменных, когда $y=y(x,z)$ и $u=u(x,z)$) имеем

$$\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}}=\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial H_{\{\kappa\}}}\right)_{P_{ph}}\left(\frac{\partial H_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{P_{ph}} \text{ и } \left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}=\left(\frac{\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}}{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}\right)_{V}\left(\frac{\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}}{\partial T_{ph}}\right)_{V}, \tag{88}$$

а из (85) и (86) следует, что $\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial H_{\{\kappa\}}\right)_{P_{ph}}=1/T_{ph}$, $\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}\right)_{V}=1/T_{ph}$. Следовательно выражения (87) можно переписать в виде

$$C_p=\left(\partial H_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}},\quad C_V=\left(\partial\mathcal{E}_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{V}. \tag{89}$$

Получим теперь связующее соотношение между теплоёмкостями C_p и C_V. С использованием равенства

$$\left(\partial z/\partial m\right)_n=\left(\partial z/\partial x\right)_y\left(\partial x/\partial m\right)_n+\left(\partial z/\partial y\right)_x\left(\partial y/\partial m\right)_n, \tag{90}$$

являющегося следствием выражения для полного дифференциала функции $z=z(x,y)$, легко получить (при $m=x$) соотношение

$$\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}=\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial T_{ph}\right)_{V}+\left(\partial\tilde{S}_{\{\kappa\}}/\partial V\right)_{T_{ph}}\left(\partial V/\partial T_{ph}\right)_{P_{ph}}. \tag{91}$$

Отсюда, при учете уравнения Максвелла $(\partial S_{\{\kappa\}}/\partial V)_{T_{ph}} = (\partial P_{ph}/T_{ph})_V$, следует

$$C_p - C_V = T_{ph}\left(\partial P_{ph} / \partial T_{ph}\right)_V \left(\partial V / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}} . \tag{92}$$

Это соотношение может быть записано и в другом виде, если использовать так называемую «связку трёх производных» $\left(\partial z / \partial x\right)_y \left(\partial x / \partial y\right)_z \left(\partial y / \partial z\right)_x = -1$ (следствие соотношения (90) при $m = x,\ n = z$), из которой следует

$$\left(\partial P_{ph} / \partial T_{ph}\right)_V = -\left(\partial V / \partial T_{ph}\right)_{P_{ph}} \left(\partial P_{ph} / \partial V\right)_{T_{ph}} . \tag{93}$$

С учётом (93) связь между введенными теплоёмкостями приобретает почти обычный вид:

$$C_p - C_V = -T_{ph}\left(\partial V / \partial T_{ph}\right)^2_{P_{ph}} / \left(\partial V / \partial P_{ph}\right)_{T_{ph}} . \tag{94}$$

Таким образом, используя обобщенную энтропию Клаузиуса (80) можно получить основной набор макроскопических термодинамических соотношений (85), (86) и (94) для термодинамики Каниадакиса. Стандартная форма полученных соотношений свидетельствует об их инвариантности относительно неаддитивной модификации их классических аналогов.

6. ДИВЕРГЕНЦИЯ БРЭГМАНА. ОБОБЩЕННАЯ *H*-ТЕОРЕМА

Покажем теперь, что в равновесном состоянии энтропия Каниадакиса достигает своего максимального значения. Рассмотрим с этой целью так называемую дивергенция Брэгмана [40,41]

$$D_{\{\kappa\}}\left[p : p_0\right] := S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) - S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) + \lambda k_{\mathcal{B}} \int \left(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\right) \ln_{\{\kappa\}}\left(\frac{p_0(\boldsymbol{r})}{\alpha}\right) d\Gamma \geq 0 , \tag{95}$$

которая относится к наиболее существенным статистическим характеристикам динамической системы [42]. Являясь функционалом, она определяет меру статистической упорядоченности в микросостояниях системы с распределением $p(\boldsymbol{r})$ относительно состояния с распределением $p_0(\boldsymbol{r})$. Выражение (95) представляет собой функционал для двух нормированных распределений $\int p(\boldsymbol{r}) d\Gamma = = \int p_0(\boldsymbol{r}) d\Gamma = 1$.

Различные свойства дивергенции Брэгмана в полном объеме приведены в работе [41]. Здесь же мы отметим, что величина $D_{\{\kappa\}}(p : p_0)$ является вещественным, положительным, выпуклым (в первом аргументе) функционалом. Легко видеть, что при $\kappa \to 0$ эта величина переходит в известную информацию различия Кульбака−Лейблера (см. [10, 43])

$$D_{\{\kappa\} \to 0}(p : p_0) \Rightarrow K(p : p_0) := k_{\mathcal{B}} \iint p(\boldsymbol{r}) \ln\left(\frac{p(\boldsymbol{r})}{p_0(\boldsymbol{r})}\right) d\Gamma . \tag{96}$$

Кроме этого, поскольку при $p = p_0$ имеет место равенство $D_{\{\kappa\}}(p:p) = 0$, то дивергенция Брэгмана является функцией Ляпунова[i].

Принцип максимума энтропии равновесного распределения. Пусть распределение $p_0(\boldsymbol{r})$ является равновесным, для которого справедливо представление (47): $p_0(\boldsymbol{r}) = \alpha \exp_{\{\kappa\}}\left\{-\mathcal{X}(\boldsymbol{r})/\lambda\right\}$, а распределение $p(\boldsymbol{r},t)$ соответствует произвольному состоянию системы. Кроме этого, будем полагать, что для обоих представлений справедливо так называемое, условие Гиббса [10]:

$$\mathcal{E}_{\{\kappa\}} = \mathcal{E}_{\{\kappa\}}^{eq}, \quad \int p_0(\boldsymbol{r})\mathcal{X}(\boldsymbol{r})d\Gamma = \int p(\boldsymbol{r},t)\mathcal{X}(\boldsymbol{r})d\Gamma, \quad \text{где } \mathcal{X}(\boldsymbol{r}) := \gamma + \frac{\beta}{k_{\mathcal{B}}}\mathcal{H}(\boldsymbol{r}). \tag{97}$$

Покажем, что в этом случае справедливо следующее равенство

$$\int \left(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\right)\ln_{\{\kappa\}}\left(p_0(\boldsymbol{r})\right)d\Gamma = \int \left(p(\boldsymbol{r}) - p_0(\boldsymbol{r})\right)u_{\{\kappa\}}\left(p_0(\boldsymbol{r})\right)d\Gamma. \tag{98}$$

Действительно, поскольку в силу (21) и (47), мы имеем

$$u_{\{\kappa\}}(p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \lambda\ln_{\{\kappa\}}(\alpha/p_0) = -\ln_{\{\kappa\}}(p_0) - \mathcal{X}, \tag{99}$$

то отсюда, при учете (97), следует соотношение (98).

Из определения дивергенции Брэгмана (95), учете тождества (97) и справедливости принятых выше предположений, следует соотношение

$$S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) = S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r})) - D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right] + k_{\mathcal{B}}\int\left(p_0(\boldsymbol{r}) - p(\boldsymbol{r})\right)\mathcal{X}d\Gamma = S_{\{\kappa\}}^{eq}(p_0(\boldsymbol{r})) - D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right] \tag{100}$$

где информация различия, представленная в виде отрицательного вклада в энтропию, называется негэнтропией. Понятие негэнтропии, т.е. изменения энтропии с обратным знаком, было предложено Э. Шредингером [43]. В общем случае выполняется негэнтропийный принцип Бриллюэна [44]

$$D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right] + S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) - S_{\{\kappa\}}^{eq}(p_0(\boldsymbol{r})) \ge 0, \tag{101}$$

где знак неравенства соответствует необратимым процессам в замкнутой системе. Из неравенства (100) следует, что энтропия равновесного состояния больше, чем энтропия произвольного состояния, $S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r})) \le S_{\{\kappa\}}^{eq}$.

Теорема Гиббса и *H*-теорема. Как известно, открытая система представляет собой часть большой замкнутой системы и находится с внешним окружением в неравновесном контакте. В окружении отсутствуют неравновесные явления и можно считать, что она находится в равновесном состоянии с распределением $p_0(\boldsymbol{r})$. Сравнивая значения энтропий при условии Гиббса (97), получим из (100) теорему Гиббса [10] в виде неравенства

[i] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

$$D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right]=-\left[S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t)+S_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r}))\right]\geq 0\,. \tag{102}$$

Таким образом, увеличение энтропии системы до ее максимального значения в равновесии происходит совместно с потерей информации различия, то есть имеет место совместное увеличение статистической разупорядоченности и уменьшение статистической упорядоченности микросостояний неэкстенсивной системы.

Поскольку согласно свойству выпуклости [41]) дивергенции Брэгмана $D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right]$ является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того, чтобы состояние полного равновесия $p_0(\boldsymbol{r})$ было устойчивым, необходимо выполнение следующего неравенства

$$\frac{d}{dt}D_{\{\kappa\}}\left[p:p_0\right]=-\frac{d}{dt}\left[S_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t)-S^{eq}_{\{\kappa\}}(p_0(\boldsymbol{r}))\right]\leq 0\,. \qquad (103$$

Таким образом, при стремлении κ-системы к равновесному состоянию во временной эволюции информация различия уменьшается. Из (102) следует H-теорема для открытых неравновесных κ-систем (неравенство для энтропии Каниадакиса)

$$dS_{\{\kappa\}}(p(\boldsymbol{r}),t)\,/\,dt>0\,, \tag{104}$$

которое справедливо при приближении к состоянию полного статистического равновесия. Эта теорема утверждает, что κ-энтропия непрерывно растет при приближении системы к равновесию, где энтропия становится максимальной и достигает конечного значения. Таким образом, происходит хаотизация макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах.

Заметим, что тот факт, что κ-энтропия квазиаддитивна, и энтропия совокупной системы больше, чем сумма энтропий отдельных подсистем, указывает на то, что совокупная система термодинамически более стабильна [7].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В последнее десятилетие все больший интерес привлекает κ-статистика Каниадакиса, поскольку она обладает многими важными свойствами (принцип максимальной энтропии, термодинамическая устойчивость, устойчивость Леша, непрерывность и т.п.). Это позволяет κ-статистике быть одной из самых удачных обобщений статистической механики Больцмана−Гиббса, особенно в контексте специальной теории относительности и полученных распределений, наблюдающихся в различных физических, природных и искусственных системах.

В представленной работе дается логическая схема построения модифицированной термодинамики неэкстенсивных систем, основанная на κ-энтропии. Найдено универсальное распределение степенного закона на основе максимизации энтропии Каниадакиса при заданном ограничении усредненного значения внутренней энергии системы. Полученные при этом термодинамические равенства для обобщенного канонического ансамбля Гиббса вполне аналогичны обычным равенствам статистической термодинамики для замкнутых и открытых систем и совпадают с ними при приближении параметра деформации κ к нулю. Показано, что энтропия Каниадакиса подчиняется псевдоаддитивному закону для двух статистически независимых подсистем. Доказанная положительность κ-энтропии совокупной системы указывает на существование силы притяжения между отдельными подсистемами, и это взаимодействие явно происходит от взаимодействия между их составными частями. Получено обобщение нулевого закона термодинамики для двух независимых неэкстенсивных систем при их тепловом контакте, вводящее в рассмотрение так называемую физическую температуру T_{ph} отличающуюся от инверсии множителя Лагранжа β. Этот факт потребовал переопределения ряда термодинамических соотношений, получаемых естественным путем в рамках статистики Каниадакиса. В качестве основных предпосылок, взятых за исходный пункт нахождения модифицированных термодинамических соотношений в работе выбраны первый закон термодинамики и структура преобразования Лежандра. Путем применения обобщенной энтропии Клаузиуса к аномальной κ-системе, был получен наиболее приемлемый набор макроскопических термодинамических соотношений для неэкстенсивной κ-системы. Наконец, на основе, так называемой дивергенции Брэгмана были сформулированы и доказаны *H*-теорема и теорема Гиббса, описывающие хаотизацию макроскопической системы Каниадакиса при спонтанных переходах.

Развитый в работе подход позволяет моделировать, в частности, сложные космологические и космогонические среды (от галактик и астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур с нецелой топологической размерностью (фракталов), дальнодействующего силового взаимодействия, а также эридитальности и немарковости эволюционных процессов.

REFERENCES

[1] C. Tsallis, “Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics”, *J. Stat. Phys.*, **52**(1-2), 479-487 (1988).

[2] Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: *Full bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm*. (accessed 12 February 2020).

[3] A. Renyi, *Probability Theory*. Amsterdam: North-Holland Publ. Co. (1970).

[4] B.D. Sharma, D.P. Mittal, “New Nonadditive Measures of Relative Information”, *J. Comb. Inform. and Syst. Sci.*, **2**, 122-133 (1977).

[5] I.J. Taneja, “New Developments in Generalized Information Measures”. Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics, ed. P.W. Hawkes. *London: Academic Press,* **91**, 37-135 (1995).

[6] S. Abe, “A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics”, *Physics Letters A*, **224**, 326-330 (1997).

[7] P.T. Landsberg, V. Vedral, “Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics”, *Phys. Lett. A.* **247**, 211-216 (1998).

[8] T.D. Frank, A.R Plastino, ”Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value”, *Eur. Phys. J. B,* **30**, 543-549 (2002).

[9] R.G. Zaripov, *Samoorganizatsiya i neobratimost' v neekstensivnykh sistemakh*, Kazan': Izd-vo Fen, (2002).

[10] R.G. Zaripov, *Printsipy neekstensivnoy statisticheskoy mekhaniki i geometriya mer besporyadka i poryadka*. Kazan': Izd-vo Kazan. Gos. tekhn. un-ta. (2010).

[11] A.V. Kolesnichenko, ”K razrabotke neadditivnoy termodinamiki kvantovykh sistem na osnove statistiki Tsallisa”, *Mathematica Montisnigri,* **45**, 26-51 (2019).

[12] A.V. Kolesnichenko, ”Modelirovaniye lineynogo otklika kvantovoy neekstensivnoy sistemy na dinamicheskoye vneshneye vozmushcheniye”, *Matemat. Model.,* **31** (12), 97-118 (2019).

[13] A.V. Kolesnichenko, "Dvukhparametricheskiy entropiynyy funktsional Sharma-Mittala kak osnova semeystva obobshchyenykh termodinamik neekstensivnykh system", *Mathematica Montisnigri*, **42**, 74-101 (2018).

[14] A.V. Kolesnichenko, "K obosnovaniyu v ramkakh neekstensivnoy statistiki Tsallisa sootnosheniy vzaimnosti Onzagera dlya kineticheskikh koeffitsiyentov", *Mathematica Montisnigri*, **44**, 41-59 (2019).

[15] A.V. Kolesnichenko, *Statisticheskaya mekhanika i termodinamika Tsallisa neadditivnykh system: Vvedenie v teoriyu i prilozheniya*. Moskow: LENAND. (Sinergetika ot proshlogo k budushchemu. № 87), (2019).

[16] A.V. Kolesnichenko, "Modifikatsiya v ramkakh statistiki Tsallisa kriteriev gravitatsionnoy neustoychivosti astrofizicheskikh diskov s frartal'noy strukturoy fazovogo prosranstva", *Mathematica Montisnigri*, **32**, 93-118 (2015).

[17] A.V. Kolesnichenko, "Kriteriy termicheskoy ustoychivosti i zakon raspredeleniy chastits dlya samogravitiruyushchikh astrofizicheskikh system v ramkakh statistiki Tsallisa", *Mathematica Montisnigri*, **37**, 45-75 (2016).

[18] A.V. Kolesnichenko, "Power distributions for self-gravitating astrophysical systems based on nonextensive Tsallis kinetics", *Solar System Research*, **51**(2), 127-144 (2017).

[19] A.V. Kolesnichenko, B.N. Chetverushkin, "Kinetic derivation of a quasi-hydrodinamic system of equations on the base of nonextensive statistics", *RJNAMM (Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*), **28**(6), 547-576 (2013).

[20] A.V. Kolesnichenko, M.Ya. Marov, "Renyi Thermodynamics as a Mandatory Basis to Model the Evolution of a Protoplanetary Gas–Dust Disk with a Fractal Structure", *Solar System Research*, **53**(6), 443-461 (2019).

[21] G. Kaniadakis, "Non-linear kinetics underlying generalized statistics", *Physica A*, **296**, 405-425 (2001)

[22] G. Kaniadakis, A.M. Scarfone, "A new one-parameter deformation of the exponential function", Physica A, **305**, 69-75 (2002).

[23] G. Kaniadakis,"Statistical mechanics in the context of special relativity II", *Phys. Rev. E,* **72**, 036108 (2005).

[24] E.M.C. Abreu, J. Neto Ananias., E.M. Barboza, R.C. Nunes, "Holographic considerations on non-gaussian statistics and gravothermal catastrophe", *Physica A*, **441**, 141-150 (2016).

[25] J.C. Carvalho, J.D. do Nascimento Jr., R. Silva, J.R. De Medeiros, "Non-Gaussian Statistics and Stellar Rotational Velocities of Main-Sequence Field Stars", *Astrophys. Journ. Lett*., **696**, L48-L51 (2009).

[26] A.M. Teweldeberhan, H.G. Miller, R. Tegen, "κ-Deformed statistics and the formation of a quark-gluon plasma", *Int. J. Mod. Phys. E,* **12**, 669-673 (2003).

[27] A. Rossani, A.M. Scarfone, "Generalized kinetic equations for a system of interacting atoms and photons: theory and simulations", *J. Physics A: Mathematical and Theoretical*, **37** (18), 4955-4975 (2004).

[28] G. Kaniadakis, "Statistical origin of quantum mechanics", *Physica A*, **307**, 172-184 (2002).

[29] E.T. Jaynes, "Information theory and statistical mechanics", *Statistical Physics. Brandeis Ltctures*, **3**, 160 (1963).

[30] G. Kaniadakis, "Theoretical Foundations and Mathematical Formalism of the Power-Law Tailed Statistical Distributions", *Entropy,* **15**, 3983-4010 (2013).

[31] D.P. Zubarev, *Neravnovesnaya statisticheskaya mekhanika*, M.: Nauka, 1971.

[32] A.M. Scarfone, "On the κ -Deformed Cyclic Functions and the Generalized Fourier Series in the Framework of the κ -Algebra", Entropy, **17**, 2812-2833 (2015).

[33] A.M. Scarfone, "κ -Deformed Fourier Transform", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications,* **480**, 63-78 (2017).

[34] A.M. Scarfone, T.Wada, “Thermodynamic equilibrium and its stability for microcanonical systems described by the Sharma-Taneja-Mittal entropy”, *Physical Review E*, **72**(2), 026123 (2005).
[35] A.M. Scarfone, T. Wada, “Canonical partition function for anomalous systems described by the κ-entropy”, *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, **162**, 45 -52 (2006).
[36] C. Tsallis. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer, 2009. 382 p.
[37] A.M. Scarfone, T. Wada, “Legendre structure of κ-thermostatistics revisited in the framework of information geometry”, *J. Phys. A*, **47**, 275002 (17 pp) (2014).
[38] S Abe, S. Martinez, F. Pennini, A. Plastino, “Nonextensive thermodynamic relations”, *Physics Letters A*, **281**(2-3), 126-130 (2001).
[39] S. Abe, ”Heat and generalized Clausius entropy of nonextensive systems”, *Eprint arXiv:cond-mat/0012115*, **3,** 1-14 (200).
[40] L. M.Bregman, ”The relaxation method of finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming”, *USSR computational mathematics and mathematical physics*, **7**(3), 200-217 (1967).
[41] A. Cichocki, S. Amari, “Families of Alpha- Beta- and Gamma- Divergences: Flexible and Robust Measures of Similarities”, *Entropy*, **12**, 1532-1568 (2010).
[42] A.M. Scarfone, “A Maximal Entropy Distribution Derivation of the Sharma-Taneja-Mittal Entropic Form”, *Open Systems & Information Dynamics*, **25**(1), 1850002-1−1850002-11 (2018).
[43] E. Shredinger, *Chto takoye zhizn' s tochki zreniya fiziki?* M.: Inost. Liter. (1947).
[44] S. Kul'bak, *Teoriya informatsii i statistika*, M.: Nauka. (1967).

Received May 15, 2020