MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol LII (2021)

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ И КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МОДЕЛИ ДВУХСКОРОСТНОЙ СРЕДЫ С РАЗНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ ФАЗ

А.Е. КРОШИЛИН[1], В.Е. КРОШИЛИН[2,3*]

[1] ОАО «ИТЦ «ДЖЭТ». Москва, Россия

[2] Московский Государственный Университет имени М.В.Ломоносова. Москва, Россия

[3] Российский Технологический Университет «МИРЭА». Москва, Россия

*Ответственный автор. E-mail: vladimir.kroshilin@gmail.com

DOI: 10.20948/mathmontis-2021-52-7

Ключевые слова: Математическое моделирование, дисперсная смесь, двухскоростное течение, два давления.

Аннотация. В настоящее время для описания двухскоростного течения дисперсной смеси, как правило, применяют двух жидкостную модель с равным давлением фаз среды, и разными скоростями фаз. Соответствующая система уравнений без специальных, постулируемых, стабилизирующих слагаемых негиперболична. Это может приводить к сложностям в поиске решения.

В последнее время предлагается шире использовать аналогичные модели, но с различными давлениями фаз среды. Такие модели позволяют учитывать новые физические эффекты, связанные с разными давлениями фаз, и часто обеспечивают гиперболичность соответствующей системы уравнений. В данной статье анализируется влияние различности давления фаз среды на свойства системы: исследуется важность соответствующих новых эффектов, гиперболичность системы уравнений, устойчивость её стационарных решений и корректность соответствующей задачи Коши. Рассмотрены три системы. За основу первой, простейшей модельной системы взята хорошо известная негиперболическая система, которая была модернизирована. Показано, что формально задача Коши для модифицированной системы корректна, но практическая возможность использования результатов расчётов, полученных из решения этой системы, должна исследоваться в каждом конкретном случае, и зависит от расчетного шага и длительности изучаемого процесса. Методики, отработанные для решения первой простейшей системы, были использованы для других систем. В качестве второй системы рассмотрена модель течения двухфазной среды с разными давлениями фаз и двумя уравнениями импульса. Будем предполагать фазы баротропными. Постулируем уравнение, связывающее давление в фазах. Доказано, что эта система всегда гиперболическая. Исследована устойчивость её стационарных решений. Выведены соотношения, позволяющие определять в каких условиях из-за неустойчивости полученные решения недостоверные. Проведено сравнение свойств этой системы с системой двухскоростного течения дисперсной смеси с равным давлением фаз среды. В качестве третьей системы рассмотрена модель с двумя давлениями, описывающая пульсации пузырьков. Будем предполагать фазы баротропными. Определены условия, когда система негиперболическая, а задача Коши некорректна. Исследовано, для каких условий некорректность задачи Коши приводит к недостоверности решения, а при каких условий некорректность задачи Коши не приводит к недостоверности решения.

2010 Mathematics Subject Classification: 76T10, 76T15, 76T20.
Key words and Phrases: Mathematical Modeling, Dispersed Mixture, Two-speed Flow, Two Pressures.

FLOW STABILITY AND CORRECTNESS OF THE CAUCHYPROBLEM FOR A TWO-SPEED MEDIUM MODEL WITH DIFFERENT PHASE PRESSURES

A.E. KROSHILIN[1], V.E. KROSHILIN[2,3*]

[1] JSC «ETC «GET». Moscow, Russia

[2] Lomonosov Moscow State University. Moscow, Russia

[3] Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «MIREA-Russian Technological University». Moscow, Russia

* Corresponding author. E-mail: vladimir.kroshilin@gmail.com

DOI: 10.20948/mathmontis-2021-52-7

Summary. At present, to describe the two-velocity flow of a dispersed mixture, as a rule, a two-fluid model is used with equal pressure of the phases of the medium and different velocities of the phases. The corresponding system of equations without special, postulated, stabilizing terms is non-hyperbolic. This can lead to difficulties in finding a solution.

Recently, it has been proposed to use similar models more widely, but with different pressures of the phases of the medium. Such models allow one to take into account new physical effects associated with different phase pressures and often provide hyperbolicity of the corresponding system of equations. This article analyzes the influence of the difference in the pressure of the phases of the medium on the properties of the system: the importance of the corresponding new effects, the hyperbolicity of the system of equations, the stability of its stationary solutions, and the correctness of the corresponding Cauchy problem are investigated. Three systems are considered. The first, simplest model system is based on the well-known non-hyperbolic system, which has been modernized. It is shown that the Cauchy problem for the modified system is formally correct, but the practical possibility of using the calculation results obtained from the solution of this system should be investigated in each specific case, and depends on the calculated step and duration of the process under study. The techniques worked out to solve the first simplest system were used for other systems. As the second system, a model of the flow of a two-phase medium with different phase pressures and two momentum equations is considered. We will assume the phases are barotropic. Let us postulate an equation relating the pressure in the phases. It is proved that this system is always hyperbolic. The stability of its stationary solutions is investigated. Relationships are derived that make it possible to determine under what conditions, due to instability, the obtained solutions are unreliable. The properties of this system are compared with the system of two-speed flow of a dispersed mixture with equal pressure of the phases of the medium. As a third system, a two-pressure model describing bubble pulsations is considered. We will assume the phases are barotropic. Conditions are determined when the system is non-hyperbolic and the Cauchy problem is incorrect. It is investigated for what conditions the ill-posedness of the Cauchy problem leads to the unreliability of the solution, and under what conditions the ill-posedness of the Cauchy problem does not lead to the unreliability of the solution.

1 ВВЕДЕНИЕ

Широко применяемая для описания дисперсной смеси двух жидкостную модель с равным давлением фаз среды, и разными скоростями фаз была опубликована в [1] и было отмечено, что эта система уравнений негиперболична. Хорошо известны среды со сложной структурой (не дисперсные среды) в которых учитывается отличие давлений фаз [2]. До недавнего времени считалось, что в дисперсных средах различие давлений быстро приводит к сжатию или расширению фаз и давления, становятся равными, поэтому давления математических моделях предполагались равными [2]. Задача о пульсации пузырьков в пузырьковой смеси, описываемая уравнением Рэлея-Ламба, вероятно, единственное, хорошо известное исключение из этого правила [2]. Негиперболичность не является физической, а является «дефектом» математической модели, приводящей в определённых условиях к неограниченному росту объёмной концентрации фазы включений. В реальной среде значение объёмной концентрации фазы включений не может больше значения, соответствующего плотной упаковке, если не учитывать деформацию формы включений. При приближении значения объёмной концентрации к значению, соответствующему плотной упаковке, возникают силовые взаимодействия непосредственно между включениями, что не позволяет включениям приблизиться друг к другу ближе, чем на два радиуса. В экспериментах, как правило, не происходит сближения включений до состояния плотной упаковки, следовательно, в межфазной силе есть слагаемые, препятствующие сближению включений. Именно отсутствие этих слагаемых в математической модели [1] и приводит к негиперболичности системы и некорректности задачи Коши. В работе [3] была исследована некорректность соответствующей задачи Коши, и предложены пути устранения этого недостатка, формально, делающего недостоверными полученные из решения этих уравнений результаты. В настоящее время существуют два пути решения этой проблемы [4]. Первый – введение дополнительных, стабилизирующих слагаемых в уравнения импульса, подробная реализация этого подхода с обзором литературы дана в [5] и были установлены основные закономерности. В этой работе доказано, что недостаточно обеспечить гиперболичность системы, необходимо, чтобы стационарные решения были устойчивы; определены условия, когда неустойчивость решения приводит к невозможности получить достоверное решение, причем неустойчивость решения не является физической, а возникает из-за «дефекта» системы. Недостатком этого подхода является невозможность прямого получения стабилизирующего слагаемого, например, из эксперимента или путём осреднения микроуравнений. Другой подход заключается в учёте отличия давлений фаз. В последнее время именно этот подход активно развивается [6]. Этому подходу и посвящена данная работа.

Для исследования влияния различности давления фаз среды на свойства системы (гиперболичность системы уравнений, устойчивость её стационарных решений и корректность соответствующей задачи Коши) необходимо проанализировать исходную систему дифференциальных уравнений, состоящую из двух уравнений сохранения массы, двух уравнений сохранения энергии, двух уравнений сохранения энергии фаз и замыкающего уравнения связывающего давления фаз. Используя результаты полученные в [7], удаётся показать, что комплексные собственные значения, которые определяют негиперболичность уравнений, не связаны со сжимаемостью фаз, что позволяет исследовать эту проблему в простейшем случае двухскоростного течения

баротропных фаз. Это существенно упрощает задачу. Из системы исключаются два уравнения энергии фаз.

2 ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

Модель двух жидкостной гидродинамики достаточно сложная для теоретического анализа. Поэтому в качестве первого шага рассмотрим простейшую тестовую задачу, для которой имеется аналитическое решение, что позволяет исследовать основные закономерности. Одна из простейших не гиперболических систем уравнений – стационарное уравнение теплопроводности в плоскости x,y (уравнение Лапласа)

$$\frac{\partial^2 \mathrm{T}}{(\partial \mathrm{x})^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{T}}{(\partial \mathrm{y})^2} = 0$$

где T–температура.

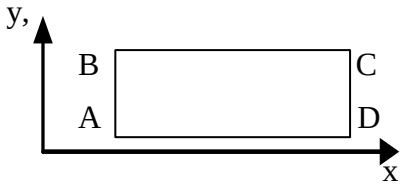

Рис. 1 Область определения температуры

Будем определять температуру в прямоугольной области, показанной на рис. 1. Задавая произвольные значения на границе ABCD, будут однозначно определены значения температуры внутри области. Формально заменяем переменную y на t. Стандартным способом перейдем от приведенного выше уравнения с заменой y на t к системе двух уравнений первого порядка, вводя переменные:

$$y_1 = \frac{\partial T}{\partial x} \text{ и } y_2 = \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}_1}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \mathrm{y}_2}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{y}_2}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial \mathrm{y}_1}{\partial \mathrm{x}} = 0.$$

Для этой системы уравнений можно пытаться решать задачу Коши. Легко показать, что характеристики этой системы равны

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

Т.е. это не гиперболическая система, корни характеристического уравнения комплексно-сопряжённые, задача Коши для системы не корректна.

Разберём некорректности задачи Коши в терминах анализа устойчивости её решений. Будем искать решения в виде:

$$(\mathrm{y}) = (\mathrm{y})_0 + (\mathrm{A_y}) e^{i(kx - \omega t)}$$

Легко показать, что условием существования таких решений будет выполнение следующего дисперсионного соотношения:

$$\omega^2 + \mathrm{k}^2 = 0. \qquad (2)$$

У этого уравнения есть следующие решения:

$$\omega_{1,2} = \pm \mathrm{ik}$$

Видно, что малые возмущения экспоненциально растут, причем в пределе коротких волн, скорость их роста стремится к бесконечности. Т.е. любые малые возмущения за любое время бесконечно возрастают…, т.е. такие решения «физически» бессмысленны, что и дает «физический» смысл некорректности задачи Коши.

Часто встречается мнение, что такие задачи можно, в определённых условиях, численно решать, так как при численном решении максимально возможное волновое число k определяется размером расчетной сетки, а значит, при не слишком мелкой расчетной сетке и не слишком продолжительном времени решения задачи, ошибка, вызванная неточностью задания начальных условий, будет не велика. Справедливость такого мнения не очевидна, так как устойчивость численного расчёта подразумевает неизменность результатов при стремлении размера расчетной сетки к нулю, а в данной задаче это не так.

Теперь подправим систему (1), добавив еще одно уравнение:

$$\frac{\partial \mathrm{y}_1}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial \mathrm{y}_2}{\partial \mathrm{x}} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial t} - m^2 \frac{\partial y_1}{\partial x} + (1 + m^2) \frac{\partial y_3}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial t} + \frac{1}{t_0}(y_3 - y_1) = 0,$$

где m–положительная константа

Третье уравнение, означает, что добавочная переменная y_3 за характерное время t_0 стремится к переменной y_1. Понятно, что в случае t_0 стремящемся к нулю, решения систем (1) и (3) должны совпадать. Тем не менее характеристики системы (3) равны

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_{2,3} = \pm m$$

Видно, что эта система гиперболична, и её собственные значения не зависят от t_0 и значит, формально, задача Коши для неё корректна.

Если же мы посмотрим устойчивость её решений, то аналогичное (2) дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\omega^3 + \omega^2 \mathrm{i}\frac{1}{t_0} - \omega \mathrm{k}^2 m^2 + \mathrm{k}^2 \mathrm{i}\frac{1}{t_0} = 0. \qquad (4)$$

Это уравнение 3 порядка можно приблизительно решать в предельных случаях. В случае t_0 стремящегося к нулю его решения имеют вид:

$$\omega_1 = -\mathrm{i}\frac{1}{t_0};\ \omega_{2,3} = \pm \mathrm{ik}. \qquad (5)$$

Видно, что при маленьких, решения не устойчивы, и пропорциональны k - также, как и решения системы (1)

В предельном случае k стремящемся к бесконечности, решения имеют вид:

$$\omega_1 = \mathrm{i}\frac{1}{t_0}\frac{1}{m^2};\ \omega_{2,3} = \pm km \qquad (6)$$

Т.е. одно решение растет, но с конечной скоростью, а другие 2 решения соответствуют не растущим волнам. Т.е. скорость роста неустойчивого решения (5), которая пропорциональна k, а при больших k, она постоянна (6) (не зависит от k).

Приближенное решение (5) справедливо до тех пор, пока первое слагаемое в уравнении (4) много меньше второго слагаемого в этом уравнении, т.е. $\omega \ll \frac{\mathrm{i}}{t_0}$. А в случае выполнения условия $\omega \gg \frac{\mathrm{i}}{t_0}$ справедливо решение (5).

Особо исследуем общий случай (не придельный). Для простоты считаем $\mathrm{m} = 1$. Рассмотрим t_0 фиксировано, а k меняется. Введем безразмерную величину $\overline{\omega} = \omega * t_0$.

Уравнение (4) перепишем в виде В предельном случае k стремящемся к бесконечности, решения имеют вид:

$$\overline{\omega}^3 + \overline{\omega}^2\mathrm{i} - \overline{\omega}(\mathrm{k}t_0)^2 + \mathrm{i}(\mathrm{k}t_0)^2 = 0.$$

Решение выписанного выше уравнения находим по формуле Кардано [8]. На Рис. 2 показано, как меняется мнимая часть этого решения.

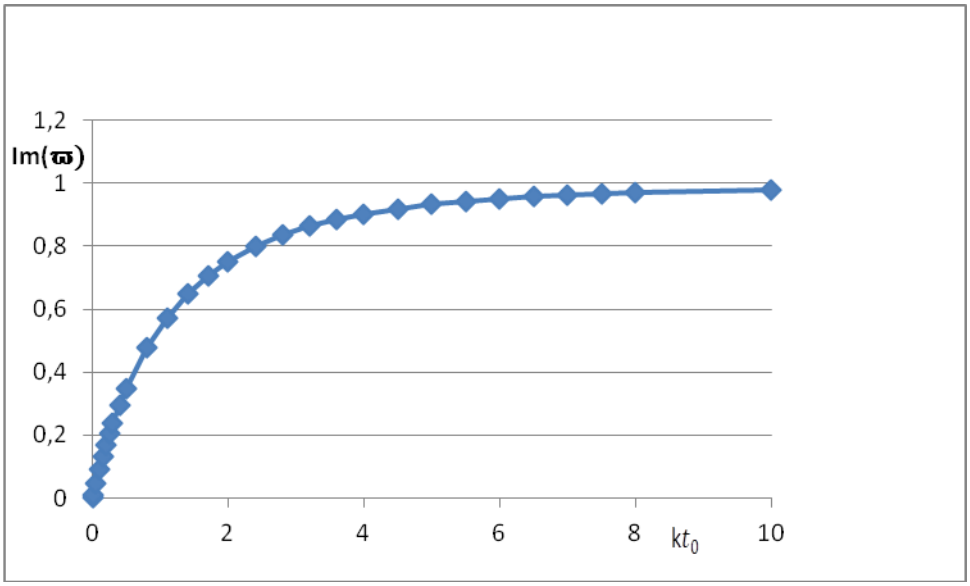

Рис. 2 Зависимость мнимой части частоты от волнового числа

Из рисунка видно, что $\mathrm{Im}\,(\overline{\omega})$ в начале линейно растет, что соответствует неустойчивости - решение (5), а затем, когда начинают преобладать слагаемые k, с $\mathrm{Im}\,(\overline{\omega})$, выходит на постоянное значение, соответствующее решению (6), что и обеспечивает формальную корректность задачи Коши.

Однако, при попытке практического решения задачи Коши, например, при t_0=0,01с, при использовании аналитических решений системы (4) погрешности задания начальных условий при $kt_0 > 8$ за десять секунд увеличиваются примерно в 10^{500} раз,

что делает решения этой системы «физически» бессмысленными, хотя, формально, система (3) и гиперболична и задача Коши – корректна.

Достоверность (и возможность практического использования) численных решений системы (3) зависит от конкретных условий и шага расчётной сетки (который определяет максимальное значение k) и может не совпадать с приведенной выше оценкой. Например, если t_0 =0,01с, и нужно с шагом 0,1 м просчитать процесс длительностью 10 с., то максимальное значение k порядка 10. Следовательно, применимо приближение (4), и значит, погрешность начальных данных на конец расчета возрастёт примерно в 10^{50} раз, т.е. результаты таких расчётов также не имеют ни какого «физического» смысла.

Если, же, например, с шагом 10^{-3} м, нужно просчитать 10^{-2} с, то максимальное значение k порядка 10^3, и применимо приближение (5). Погрешность начальных данных в конце такого расчета возрастёт примерно в 3 раза, в этом случае, часто считается, что результаты таких расчётов имеют физический смысл.

Вывод: Таким образом, формально задача Коши для модифицированной системы (3) корректна, но практическая возможность использования результатов расчётов, полученных из решения этой системы должна исследоваться в каждом конкретном случае и зависит от расчетного шага и длительности изучаемого процесса.

3 ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛЕЙ С ОДИНАКОВЫМИ И РАЗНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ ФАЗ

Выпишем и проанализируем приведенную в [6] модель течения двухфазной среды с разными давлениями фаз и двумя уравнениями импульса. Будем предполагать фазы баротропными: $\rho_i^0 = \rho_i^0(P_i)$, индекс i внизу показывает к какой фазе относится соответствующая величина: i=1 – жидкость, i=2– газ, где ρ_i^0 – истинная плотность i-ой фазы, P_i- давление i-ой фазы, тогда $c_i = \sqrt{\frac{dP_i}{d\rho_i^0}}$, где c_i - скорость звука i-ой фазы.

В этом случае тепловые параметры среды: температура, энергия – не входят в уравнения неразрывности и импульса, а входят только в уравнения энергии и, следовательно, для анализа системы можно не привлекать уравнения энергии.

Такая модель включает два уравнения неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_1\rho_1^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1\rho_1^0\vartheta_1) = 0, \qquad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_2\rho_2^0) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2\rho_2^0\vartheta_2) = 0,$$

два уравнения импульса

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\alpha_1\rho_1^0\vartheta_1) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}[\alpha_1(\rho_1^0\vartheta_1^2 + \mathrm{P}_1)] = \mathrm{P}_{\mathrm{int}}\frac{\partial\alpha_1}{\partial x} + \mathrm{F}_{\mathrm{m1}} - \mathrm{F}_{12}, \qquad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}(\alpha_2\rho_2^0\vartheta_2) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}[\alpha_2(\rho_2^0\vartheta_2^2 + \mathrm{P}_2)] = \mathrm{P}_{\mathrm{int}}\frac{\partial\alpha_2}{\partial x} + \mathrm{F}_{\mathrm{m2}} + \mathrm{F}_{12},$$

и, постулируемое в [6], связывающее давление в фазах уравнение

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \vartheta_{\text{int}} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x} = \mu(P_1 - P_2) \quad (9)$$

где $\mu = \frac{A_{\text{int}}}{(\rho_1^0 c_1 + \rho_2^0 c_2)}$, α_i - объемная концентрация i-ой фазы, ϑ_i - скорость i-ой фазы, ϑ_{int} - скорость на межфазной границе [6], P_{int}- давление на межфазной границе [6], A_{int}- площадь межфазной поверхности в единице объёма смеси [6]. Для упрощения выкладок ниже будут использоваться самые простые зависимости для массовых сил F_{mi} (что не влияет на основные выводы)

$$F_{m1} = -\alpha^{1}\rho_1^0 g,$$

$$F_{m2} = -\rho_2^0 \alpha^2 g,$$

где g – ускорение свободного падения, а ось x направлена вверх и самая простая, линейная зависимость для межфазной силы трения F_{12}:

$$F_{12} = f * (\vartheta_1 - \vartheta_2),$$

Оценим время выравнивания давления системы (7) - (9). Рассмотрим однородное состояние $\frac{\partial}{\partial x}=0$ для всех параметров смеси. Пусть в начальный момент $t=0$ давления фаз P_1 и P_2 отличаются. Обозначим параметры смеси в равновесном состоянии, в которое смесь перейдет и в котором $P_1 = P_2$ индексом «0» внизу. Выразим из уравнений (7) ρ_i^0 через α_i: случае t_0 стремящегося к нулю, его решения имеют вид:

$$\rho_1^0 = \frac{\alpha_{10}\rho_{10}^0}{\alpha_1};\ \rho_2^0 = \frac{\alpha_{20}\rho_{20}^0}{\alpha_2} \quad (10)$$

Рассматриваем малое изменение параметров α_1 : $\alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_1'$ ($\alpha_1' \ll \alpha_{10}$) , где штрихом обозначены отличия от равновесных значений. Подставим (10) в (9), и, используя связь давления и плотности через c_i, получим

$$\frac{d\alpha_1'}{dt} = -B * \alpha_1'$$

$$\text{где } B = \frac{\left\{\frac{c_1^2\rho_{10}^0}{\alpha_{10}} + \frac{c_2^2\rho_{20}^0}{\alpha_{20}}\right\}}{\{c_1\rho_{10}^0 + c_2\rho_{20}^0\}} A_{\text{int}}.$$

Из последнего уравнения следует, что объемная концентрация, а, значит, и все параметры выходят на равновесные значения за время $1/B$, обратно пропорциональное скорости звука и межфазной поверхности.

Например, для «типичного пузырькового течения» с параметрами $\rho_{10}^0 = 1000\ \text{кг/м}^3$; $a_{10} = 0{,}8$; $\rho_{20}^0 = 1\ \text{кг/м}^3$; $c_1 = 1000\ \text{м/с}$; $c_2 = 300\ \text{м/с}$ и диаметра пузырька $d = 3\ \text{мм}$, $B = 5 \times 10^5 \frac{1}{c}$, а характерное время выравнивания давлений при использовании уравнения (9) равно 2×10^{-6}с. Для расслоенного течения, в котором межфазная поверхность A_{int} много меньше, с теми же параметрами $B = 1{,}25 \times 10^3 \frac{1}{c}$, характерное время выравнивания давлений равно $0{,}8 \times 10^{-3}$с.

В случае модельной задачи маленькое время релаксации параметров приводило к быстрому развитию неустойчивости. Ниже изучено развитие неустойчивости для уравнений модели [6].

В рассматриваемом случае баротропных фаз уравнения неразрывности (7) удобно записать в виде

$$\frac{\partial\,\alpha_1}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_1\vartheta_1)\;+\frac{\alpha_1}{\rho_1^0 c_1^2}\left(\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial t}+\;\vartheta_1\frac{\partial \mathrm{P}_1}{\partial x}\right)=0, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial\alpha_2}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_2\vartheta_2)\;+\frac{\alpha_2}{\rho_2^0 c_2^2}\left(\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial t}+\;\vartheta_2\frac{\partial \mathrm{P}_2}{\partial x}\right)=0,$$

Выпишем матрицу для определения характеристического уравнения

$$\begin{Bmatrix} \vartheta_1-\lambda & \alpha_1 & 0 & \frac{\alpha_1}{\rho_1^0 c_1^2}(\vartheta_1-\lambda) & 0 \\ -\vartheta_2+\lambda & 0 & \alpha_2 & 0 & \frac{\alpha_2}{\rho_2^0 c_2^2}(\vartheta_2-\lambda) \\ \mathrm{P}_1-\mathrm{P}_{int} & \alpha_1\rho_1^0(\vartheta_1-\lambda) & 0 & \alpha_1 & 0 \\ \mathrm{P}_2+\mathrm{P}_{int} & 0 & \alpha_2\rho_2^0(\vartheta_2-\lambda) & 0 & \alpha_2 \\ \vartheta_{int}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Приравняв определитель выше приведенной матрицы, получим следующее характеристическое уравнение

$$\alpha_1^2\alpha_2^2(\vartheta_{int}-\lambda)\left[1-\frac{(\vartheta_1-\lambda)^2}{c_1^2}\right]\left[1-\frac{(\vartheta_2-\lambda)^2}{c_2^2}\right]=0 \qquad (12)$$

Откуда определяются характеристики

$$\lambda_1=\vartheta_{int};\;\lambda_{2,3}=\vartheta_1\pm c_1;\;\lambda_{4,5}=\vartheta_2\pm c_2 \qquad (13)$$

Характеристиками в таком виде были ранее получены в [9].

Вывод: Из (13) видно, что модель [6] с разными давлениями фаз, всегда гиперболическая, имеет пять различных действительных характеристик: одна характеристика равна скорости переноса в постулируемом в модели [6] уравнении, связывающим давление в фазах и четыре равны скоростям фаз плюс минус скорость звука в фазе.

Сравним полученные характеристики с характеристиками в аналогичной модели с одинаковым давлением фаз [1]. Принимая вышеописанные предположения, легко выписать уравнения, аналогичные уравнениям (8), но при условии равенства давления фаз ($\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2=\mathrm{P}$). Проведя вычисления, аналогично описанным в этом разделе выше, удаётся выписать характеристики, которые в предположении $\vartheta_i/\mathrm{c}_i\ll 1$ имеют вид

$$\lambda_{1,2}=\frac{\alpha_1\rho_2^0\vartheta_1+\;\alpha_2\rho_1^0\vartheta_2}{\alpha_1\rho_2^0+\;\alpha_2\rho_1^0}\pm\sqrt{\frac{\alpha_1\rho_2^0+\;\alpha_2\rho_1^0}{\frac{\alpha_1\rho_2^0}{c_1^2}+\frac{\alpha_2\rho_1^0}{c_2^2}}};$$

$$_{3,4} = \frac{\alpha_1\rho_2^0\vartheta_2 + \alpha_2\rho_1^0\vartheta_1 \pm i(\vartheta_1 - \vartheta_2)\sqrt{\alpha_1\alpha_2\rho_1^0\rho_2^0}}{\alpha_1\rho_2^0 + \alpha_2\rho_1^0}$$

Вывод: Система уравнений модели с 1 давлением, в случае межфазной силы, не зависящей от производных, всегда не гиперболическая, Две характеристики модели - действительные – линейная комбинация скоростей фаз плюс минус функция от скоростей звука фаз и две характеристики комплексные, причем они не зависят от скоростей звука фаз. скоростей звука фаз.

4 УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛЕЙ С РАЗНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ ФАЗ

Исследуем устойчивость решения системы (11,8,9). Приравняв определитель соответствующей матрицы нулю, получим дисперсионное уравнение пятой степени относительно ω, которое ввиду его громоздкости не приводится. В общем случае это дисперсионное уравнение аналитически решить невозможно. Однако его можно решить в предельных случаях. Рассмотрим два предельных случая: 1) большие k; 2) скорости фаз много меньше скоростей звука. 1) В пределе при $\mathrm{k} \to \infty$ корни дисперсионного уравнения получаются из корней (13) характеристического уравнения при замене λ на $\frac{\omega}{\mathrm{k}}$. Как видно из (13), в нулевом приближении, все решения действительны и не позволяют оценить их устойчивость. С точностью до первого приближения по $\frac{\omega}{\mathrm{k}}$ где $|\vartheta_i|/\mathrm{c}_i \ll 1 (i = 1,2; j = 1,2)$ первый корень имеет вид

$$\frac{\omega_1}{\mathrm{k}} = \vartheta_{int} + \frac{\mathrm{i}\mu}{\mathrm{k}\alpha_1\alpha_2}[\alpha_1\rho_2^0(\vartheta_{int} - \vartheta_2)^2 + \alpha_2\rho_1^0(\vartheta_{int} - \vartheta_1)^2] - \frac{\mu\mathrm{f}}{k^2\alpha_1^2\alpha_2^2}[\vartheta_{int} - \alpha_1\vartheta_2 - \alpha_2\vartheta_1]$$

Из этой формулы видно, что это решение не устойчиво. Для «типичного пузырькового течения» при $|\vartheta_{int} - \vartheta_1| \sim 0.5\ \frac{\text{м}}{\text{сек}}$, $\mathrm{Im}(\omega_1) \sim 0{,}1\frac{1}{\text{сек}}$. Тогда за 10 сек. погрешность увеличивается в 3 раза, т.е. за время больше 1 мин. погрешность увеличится более чем в 1000 раз, а, значит, результатам таких расчетов доверять нельзя, т.к если исходные данные, имеют точность не выше 1% , поэтому в 1000 раз увеличенная погрешность составляет 1000%. Эта оценка получена при $\mathrm{k} \to \infty$. Оставшиеся четыре корня в тех же предположениях, что и первый корень соответствуют устойчивым решениям. Скорость затухания возмущений очень большая. Например, для «типичного пузырькового течения» $\mathrm{Im}(\omega_1) \sim$ - 2,5 E5 $\frac{1}{\text{сек}}$.

Однако, если не делать предположений о больших k, как уже говорилось, в общем случае дисперсионное уравнение 5 порядка аналитически решить невозможно, его можно решать численно. На рис 3 для «типичного пузырькового течения» с учетом присоединенной массы, показана зависимость $\mathrm{Im}(\omega_1)$ от волнового числа k.

Как видно из графика, скорость развития неустойчивости выходит на асимптоту при $\mathrm{k} \approx 100\ \frac{1}{\text{м}}$, и приведенные выше оценки уже примерно справедливы при $\mathrm{k} \approx 25\ \frac{1}{\text{м}}$. Для остальных решений выполняется условие $\frac{\omega}{\mathrm{k}} \sim C_j$. Решение $\omega_{2,3}$ почти во всём диапазоне режимных параметров устойчиво.

Можно показать, что решения $\omega_{4,5}$ всегда устойчивы. Итак, в случае $|\vartheta_i|/c_i \ll 1$ найдены все 5 решений.

Подводя итог – аналогично тестовой задаче, несмотря на гиперболичность системы (11,8,9) во многих режимах имеется не устойчивое решение ω_1, причем, скорость его роста (для «типичного пузырькового течения» $\mathrm{Im}(\omega_1) < 0{,}1\frac{1}{\mathrm{c}}$) настолько большая (хоть и не такая огромная, как в тестовой задаче), что она может делать численные расчеты недостоверными.

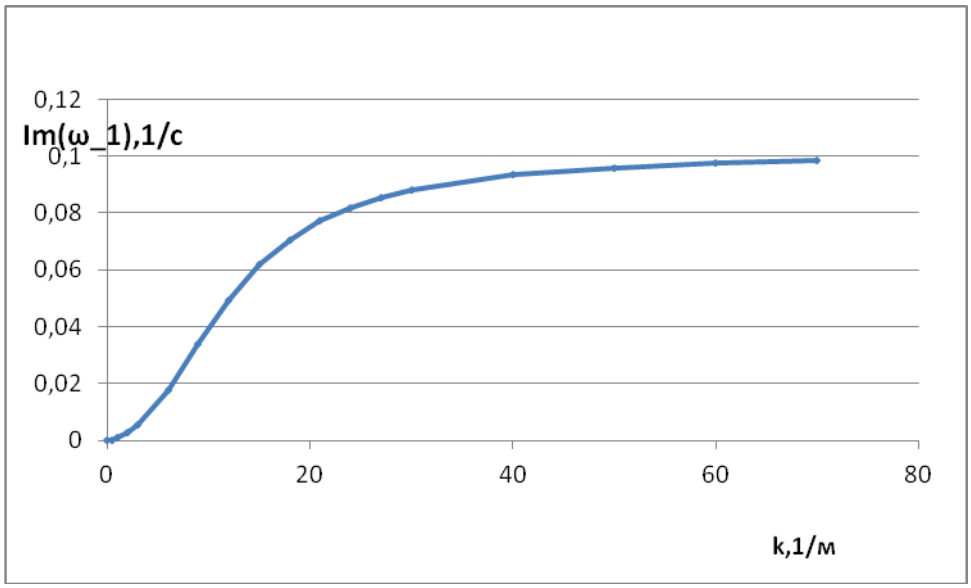

Рис. 3 Зависимость мнимой части частоты от волнового числа.

5 СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ С РАЗНЫМИ ДАВЛЕНИЯМИ ФАЗ, ОПИСЫВАЮЩАЯ ПУЛЬСАЦИИ ПУЗЫРЬКОВ

Недостатком модели [6], является, по мнению авторов, отсутствие обоснования уравнения (9). С другой стороны, например для пузырькового режима течения, хорошо известно уравнение Релея – Ламба [2], описывающее изменение давлений фаз, которое вполне обоснованно можно использовать вместо (9) [7]. Исследуем гиперболичность математической модели этой системы. Будем предполагать фазы баротропными. Исследуем устойчивость решения системы (11,8) с уравнением Релея – Ламба и уравнением баланса массы пузырьков. Приравняв определитель соответствующей матрицы нулю получаем характеристическое уравнение 7 степени.

Три характеристики этого уравнения равны скорости пузырьков. Проведенные многочисленные численные оценки показали, что при «нефизических» условиях, когда проскальзывание много больше скорости звука: $|\vartheta_{12}| \gg c_1$ четыре оставшихся корня будут действительными, т.е. система уравнений гиперболическая. А при «нормальных» условиях, когда скорость проскальзывания меньше скорости звука, из оставшихся четырёх корней два будут действительными, а оставшиеся 2 комплексными, т.е. система уравнений – не гиперболическая, а значит задача Коши для неё – не корректна. Однако, как отмечалось выше, многие авторы допускают использование результатов численных решений таких систем, если скорость развития неустойчивости решений в связи с ограничениями на волновое число, из-за размера шага численной сетки, не

велика. Для «типичного пузырькового течения» $\alpha_1 = 0{,}8$ и $\vartheta_{12} = -0{,}1\frac{\text{м}}{\text{сек}}$ при шаге расчётной сетки 1 см $\text{Im}(\omega_6) = 5\frac{1}{\text{сек}}$ Т.е. с таким шагом можно считать только короткие процессы, длительностью - до нескольких секунд.

6 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система уравнений течения двухфазной среды с разными давлениями фаз и двумя уравнениями импульса в предположении баротропности фаз и постулируемым уравнением, связывающим давления в разных фазах всегда гиперболическая. Имеет пять различных, действительных характеристик. Одна характеристика равна скорости переноса в постулируемом уравнении, связывающим давление в фазах и четыре характеристики равны скоростям фаз плюс минус скорость звука в фазе. Эта модель, несмотря на гиперболичность системы, во многих режимах имеет не устойчивое решение, причем, скорость роста возмущения (для «типичного пузырькового течения» настолько большая (хоть и не такая огромная, как для модифицированного уравнения Лапласа)), что результаты численных расчетов могут быть недостоверными.

Система уравнений с разными давлениями фаз и двумя уравнениями импульса, описывающая пульсации пузырьков при «нефизических» условиях, когда проскальзывание много больше скорости звука в жидкости гиперболическая. А при «нормальных» условиях, когда скорость проскальзывания меньше скорости звука в жидкости, система уравнений – не гиперболическая, и задача Коши для неё – не корректна. Даже если ограничить волновое число разумным шагом при численных расчетах, то большая скорость роста неустойчивости может делать использование результатов расчетов – невозможным.

REFERENCES

[1] X.A.Raxmatulin, “Osnovy` gazovoj dinamiki vzaimopronikayushhix dvizhenij sploshny`x sred”, PMM, 20 (2), 184-195 (1956).

[2] R.I. Nigmatulin, *Dynamics of Multiphase Media*, Vol.1, 2, Hemisphere, N.Y., (1990).

[3] L.A. Klebanov, A.E. Kroshilin, B.I. Nigmatulin, R.I. Nigmatulin, “O giperbolichnosti, ustojchivosti i korrektnosti zadachi Koshi dlya sistemy` differencial`ny`x uravnenij dvuxskorostnogo dvizheniya dvuxfazny`x sred”, *PMM*, **46** (1), 83-95 (1982).

[4] Daniel Lhuillier, Chih-Hao Chang, Theo G. Theofanous, “On the quest for a hyperbolic effective-field model of disperse flows”, *J. Fluid Mech.*, **731**, 184-195 (2013).

[5] A.E. Kroshilin, V.E. Kroshilin, “Correct numerical simulation of a two-phase coolant”, *Thermal Engineering*, **63** (2), 98-106 (2016).

[6] R.A. Berry, J.W. Peterson, H. Zhang, R.C. Martinean, H. Zhao, L. Zou, D. Andrs, *RELAP-7 theory manual*, Idaho National Laboratory, INT/EXT-14-31366, 2014.

[7] A.F. Zhivotyagin, S.D Kalinichenko, A.E. Kroshilin, V.E. Kroshilin, “A HighlyAccurate Method for Numerical Modeling Wave Outflow of Two-Phase Media”, *Thermal Engineering*, 47(5), 412-416 (2000).

[8] Korn G., Korn T., *Spravochnik po matematike dlya nauchny`x rabotnikov i inzhenerov*, Izdatel`stvo Nauka, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury`, Moskva (1977).

[9] Ling Zou, Haihua Zhao, Hongbin Zhang “A revisit to the Hicks’ hyperbolic twopressure two-phase flow model” *Proceedings of The 17th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermal-Hydraulics (NURETH-17), Xi`an, China Sept. 3-8*, 1-14 (2017).

Received November 2, 2021