

## ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОЕНЦИАЛА $q$ И ФУНКЦИИ ЗАПАЗДЫВАНИЯ $\alpha$

НИКОЛА МИХАЛЬЕВИЧ

Морской факультет, Университет Черногории  
Котор, Черногория  
e-mail: nikolamih@ac.me

**Ключевые слова:** Коэффициенты Фурье, оператор, потенциал, функция запаздывания  
**Аннотация.** В этой статье мы исходим из тождеств

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi q(t_1) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 = \\ & = A_c^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dT_l \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi q(t_1) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 = \\ & = A_c^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dT_l \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi q(t_1) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 = \\ & = A_s^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dT_l \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi q(t_1) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 = \\ & = A_s^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dT_l, \end{aligned} \quad (4)$$

полученных в статьях [1-17] (тождества (19) – (22)). Эти тождества использовались для формирования интегральных уравнений для неизвестных функций, зависящих от потенциала  $q$  и функции запаздывания  $\alpha$ . В статье используется анализ Фурье.

## FORMATION OF INTEGRAL EQUATIONS FOR THE POTENTIAL $q$ AND FUNCTIONS OF DELAY $\alpha$

NIKOLA MIHALJEVIC

Maritime Faculty, University of Montenegro  
Kotor, Montenegro  
e-mail: nikolamih@ac.me

**Summary.** In this paper we proceed from the identities

$$\int_0^\pi q(t_1) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 =$$

**2010 Mathematics Subject Classification:** 34B24, 35B05.

**Key words and Phrases:** Fourier coefficients, Operator, Potential, Function of delay.

$$= A_c^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dT_l \quad (1)$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_c^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dT_l \quad (2)$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_s^+(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dT_l \quad (3)$$

$$\int_0^{\pi} q(t_1) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_s^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dT_l, \quad (4)$$

obtained in the articles [1-17] (identities (19) – (22)). These identities were used to form integral equations for unknown functions that depend on the potential  $q$  and the delay function  $\alpha$ . The article uses Fourier analysis.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что заданы 4 последовательности собственных значений  $\lambda_{nij}$ ,  $n=1,2,\dots$ ,  $i,j=1,2$ . Оператор  $D_{ij}^{(2)}$  генерируется дифференциальным уравнением  $-y''(x) + q(x)y(\alpha(x)) = \lambda y(x)$  с краевыми условиями  $y'(0) - h_i y(0) = 0$  и  $y'(\pi) + H_j y(\pi) = 0$ . Для определения оператора  $D_{ij}^{(2)}$  необходимо определить коэффициенты  $h_i$  и  $H_j$ ,  $i,j=1,2$  из краевых условий, что было сделано в работе [1 14], а также и потенциал  $q$  и функцию запаздывания  $\alpha$ , которые будут определены в этой статье для формирования соответствующих интегральных уравнений.

Система тождеств (1), (2), (3) и (4) эквивалентна следующим четырем последовательностям численных равенств при  $z = m$ ,  $m \in N$

$$\begin{aligned} & (-1)^m \int_0^{\pi} q(t_1) \cos m(t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 = \\ & = A_c^+(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \cos m(t_1 - \alpha(t_1)) dT_l \end{aligned} \quad (5)$$

$$(-1)^m \int_0^{\pi} q(t_1) \cos m(t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 =$$

$$= A_c^-(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \cos m(t_1 + \alpha(t_1)) dT_l \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & (-1)^m \int_0^\pi q(t_1) \sin m(t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 = \\
 & = A_s^+(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \sin m(t_1 - \alpha(t_1)) dT_l
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & (-1)^m \int_0^\pi q(t_1) \sin m(t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 = \\
 & = A_s^-(m) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, m) \sin m(t_1 + \alpha(t_1)) dT_l
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом имеем

$$\begin{aligned}
 A_c^+(m) &= \frac{1}{(H_1 - H_2)(h_1 - h_2)} \{m^2 [F_{11}(m) + F_{22}(m) - F_{12}(m) - F_{21}(m)] + \\
 & \quad + H_2 [h_2 F_{11}(m) - h_1 F_{21}(m)] - H_1 [h_2 F_{12}(m) - h_1 F_{22}(m)]\} \\
 A_c^-(m) &= \frac{1}{(H_1 - H_2)(h_1 - h_2)} \{H_2 [h_2 F_{11}(m) - h_1 F_{21}(m)] - H_1 [h_2 F_{12}(m) - h_1 F_{22}(m)] + \\
 & \quad + m^2 [F_{11}(m) + F_{22}(m) - F_{12}(m) - F_{21}(m)]\} \\
 A_s^+(m) &= \frac{m}{(H_1 - H_2)(h_1 - h_2)} \{h_2 F_{11}(m) - h_1 F_{21}(m) - h_2 F_{12}(m) + h_1 F_{22}(m) + \\
 & \quad + H_2 [F_{11}(m) - F_{21}(m)] + H_1 [F_{12}(m) - F_{22}(m)]\} \\
 A_s^-(m) &= \frac{m}{(H_1 - H_2)(h_1 - h_2)} \{h_2 F_{11}(m) - h_1 F_{21}(m) - h_2 F_{12}(m) + h_1 F_{22}(m) + \\
 & \quad + H_2 [F_{11}(m) - F_{21}(m)] H_1 [F_{12}(m) - F_{22}(m)]\}
 \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Для коэффициентов  $A_c^+(m)$ ,  $A_c^-(m)$ , а также  $A_s^+(m)$ ,  $A_s^-(m)$  имеем

$$A_c^+(m) = A_c^-(m) = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad A_s^+(m) = A_s^-(m) = O\left(\frac{1}{m}\right), \quad m \rightarrow \infty, \quad m \in N.$$

**Доказательство.** На основе (23) из работы [14] при  $z = m$  и  $m \rightarrow \infty$  следует

$$\begin{aligned}
 F_{ij}(m) &= \frac{\pi \zeta_{0ij}^{(1)}}{2} (-1)^m - \frac{\zeta_1 \pi}{2m} \sin m \alpha(\pi) + \frac{1}{m^2} \left[ \left( \frac{\pi \zeta_{2ij}^{(1)}}{2} + \frac{\pi \alpha(\pi) \zeta_{0ij} \zeta_1}{4} \right) \cos m \alpha(\pi) + \right. \\
 & \quad \left. + (-1)^m \left( \frac{\pi \zeta_{2ij}^{(0)}}{2} - \frac{\pi^2 \alpha(\pi) \zeta_{0ij} \zeta_1}{4} + \frac{3}{8} \pi \zeta_{0ij}^2 - \frac{\pi^2 \zeta_{0ij}^3}{48} - \frac{\pi \zeta_{0ij} \lambda_{0ij}}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{m^3}\right).
 \end{aligned}$$

Достаточно доказать, что  $\delta_m = F_{11}(m) + F_{22}(m) - F_{12}(m) - F_{21}(m) = O\left(\frac{1}{m^3}\right)$ .

Коэффициенты  $h_i$  и  $H_j$ ,  $i, j = 1, 2$  определяются из уравнения  $\frac{\pi}{2}\zeta_{0ij} = h_i + |H_j$ . Поэтому

$$\zeta_{011} + \zeta_{022} - \zeta_{012} - \zeta_{021} = 0.$$

Так свободный член в выражении для  $\delta_m$  равен нулю. При  $\frac{1}{m}$  выражение не зависит от  $i$  и  $j$ , поэтому он равен нулю. Также нужно доказать, что и коэффициент при  $\frac{1}{m^2}$  в выражении для  $\delta_m$  также равен нулю. Так как

$$\zeta_{2ij}^{(1)} = -\frac{\alpha(\pi)\zeta_{0ij}\zeta_1}{2} + \left| \frac{H_j}{\pi}(\tilde{q}_1(\pi) + \tilde{q}_2(\pi)) + \frac{h_i}{\pi}(\tilde{q}_1(\pi) - \tilde{q}_2(\pi)) - \frac{\tilde{q}_1(\pi) + \tilde{q}_2(\pi)}{2} \right.$$

и

$$\zeta_{2ij}^{(0)} = \frac{\pi\alpha(\pi)\zeta_{0ij}}{2} - \frac{3}{4}\zeta_{0ij}^2 + \left| \frac{\pi^2\zeta_{0ij}^3}{24} + \lambda_{0ij}\zeta_{0ij} + \frac{\tilde{q}_2(0) - \tilde{q}_1(0)}{\pi} + \frac{H_j - 1}{\pi}(\tilde{q}_2(0) + \tilde{q}_1(0)) \right.$$

то

$$\zeta_{211}^{(1)} + \zeta_{222}^{(1)} - \zeta_{212}^{(1)} - \zeta_{221}^{(1)} = 0.$$

Таким образом, коэффициент при  $\cos m\alpha(\pi)$  равен нулю. Остается проверить, что коэффициент при  $(-1)^m$  также равен нулю, как можно видеть из выражения для  $\zeta_{2ij}^{(0)}$  и предыдущих равенств. Таким образом, мы доказали, что  $\delta_m = O\left(\frac{1}{m^3}\right)$ . Проведя другой элементарный расчет, заключаем, что  $A_c^\pm(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$  и  $A_s^\pm(m) = O\left(\frac{1}{m}\right)$ .

**Замечание 1.** Результаты теоремы 1 играют важную роль в формировании заявленных интегральных уравнений. А именно,  $A_c^\pm(m)$  и  $A_s^\pm(m)$  можно рассматривать как коэффициенты Фурье некоторых функций из  $L_1$  на соответствующем промежутке.

## 2. ФОРМИРОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введя сдвиги  $\gamma_1(t_i) = t_i - \alpha(t_i) = \bar{t}_i$  мы имеем  $t_i = \gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)$  и  $dt_i = [\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)]' d\bar{t}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ . Введем функцию  $\tilde{q}_1(\bar{t}_i)$

$$\tilde{q}_1(\bar{t}_i) = \begin{cases} 0 & , \bar{t}_i \in (\gamma_1(\pi), 2\pi] \\ q(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i))[\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)]' & , \bar{t}_i \in [0, \gamma_1(\pi)]. \end{cases}$$

Пусть  $B_m^{(1)} = (-1)^{m+1} A_c^+(m)$  и  $A_m^{(1)} = (-1)^{m+1} A_s^+(m)$ . Теперь равенства (7) и (5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 = \\ & = B_m^{(1)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) \sin m(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))) d\bar{T}_l, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 = \\ & = A_m^{(1)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) \cos m(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))) d\bar{T}_l, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{D}_l^{(1)} &= \{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_l) | 0 \leq \bar{t}_1 \leq \\ & \leq \gamma_1(\pi), 0 \leq \bar{t}_2 \leq \gamma_1(\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))), \dots, \gamma_1(\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1)))\}, \\ \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) &= \prod_{i=1}^l \tilde{q}_1(\bar{t}_i), \quad \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) = \prod_{i=1}^{l-1} \sin m(\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})) \end{aligned}$$

и

$$d\bar{T}_l = d\bar{t}_1 d\bar{t}_2 \dots d\bar{t}_l.$$

Перемножая отношения (9) с  $\frac{1}{\pi} \sin m\bar{x}$ , и отношения (10) с  $\frac{1}{\pi} \cos m\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in [0, 2\pi]$ , а затем суммируя при  $m = 1, 2, \dots$  получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \sin m\bar{x} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \cos m\bar{x} \right\} = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^{(1)} \sin m\bar{x} + A_m^{(1)} \cos m\bar{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\bar{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned}$$

На основе теоремы 1 имеем

$$\frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^{(1)} \sin m\bar{x} + A_m^{(1)} \cos m\bar{x}) = \tilde{f}_1(\bar{x})$$

при этом свободный член функции Фурье  $\tilde{q}_1(\bar{t}_1)$  задается:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dT_l,$$

соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{D_l} Q(T_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(t_i) - t_{i+1}) dT_l$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(1)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{D_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l,$$

где  $A_0^{(1)} = (\alpha_1(0) - \beta_1(0))/2$ . Соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \sin m\bar{x} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_1(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \cos m\bar{x} \right\} = \tilde{q}_1(\bar{x}), \quad \bar{x} \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции  $\tilde{q}_1(\bar{x})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1(\bar{x}) &= \tilde{f}_1(\bar{x}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{D_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{D_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned} \quad (11)$$

Введем оператор  $A_{1\alpha}$  следующим образом

$$\begin{aligned} A_{1\alpha} \tilde{q}_1(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{D_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{D_l^{(1)}} \tilde{Q}_1(\bar{T}_l) \bar{P}_1(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_1^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha(\gamma_1^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда интегральное уравнение (11) может быть записано в виде

$$\tilde{q}_1(\bar{x}) = \tilde{f}_1(\bar{x}) - A_{1\alpha} \tilde{q}_1(\bar{x}) \quad (13)$$

Кроме того, если мы сделали сдвиг  $\gamma_2(t_i) = t_i + \alpha(t_i) = \bar{t}_i$ , то имеем  $t_i = \gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)$  и  $dt_i = [\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)]' d\bar{t}_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ . Введем функцию  $\tilde{q}_2(\bar{t}_i)$

$$\tilde{q}_2(\bar{t}_i) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{t}_i \in (\gamma_2(\pi), 2\pi] \\ q(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) [\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)]' & , \quad \bar{t}_i \in [0, \gamma_2(\pi)]. \end{cases}$$

Пусть  $B_m^{(2)} = (-1)^{m+1} A_s^-(m)$  и  $A_m^{(1)} = (-1)^{m+1} A_c^-(m)$ . Теперь равенства (8) и (6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 = \\ & = B_m^{(2)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) \sin m(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))) d\bar{T}_l, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 = \\ & = A_m^{(2)} - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) \cos m(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) + \alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))) d\bar{T}_l, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{D}_l^{(2)} & = \{(\bar{t}_1, \bar{t}_2, \dots, \bar{t}_l) | 0 \leq \bar{t}_1 \leq \\ & \leq \gamma_2(\pi), 0 \leq \bar{t}_2 \leq \gamma_2(\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))), \dots, \gamma_2(\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1)))\}, \\ \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) & = \prod_{i=1}^l \tilde{q}_2(\bar{t}_i), \quad \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) = \prod_{i=1}^{l-1} \sin m(\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})) \end{aligned}$$

и

$$d\bar{T}_l = d\bar{t}_1 d\bar{t}_{l-1} \dots d\bar{t}_1.$$

Перемножая отношение (14) с  $\frac{1}{\pi} \sin m\bar{x}$ , и отношение (15) с  $\frac{1}{\pi} \cos m\bar{x}$ ,  $\bar{x} \in [0, 2\pi]$ , а затем суммируя при  $m = 1, 2, \dots$ , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \sin m\bar{x} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \cos m\bar{x} \right\} = \frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^{(2)} \sin m\bar{x} + A_m^{(2)} \cos m\bar{x}) - \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned}$$

На основании теоремы 1 имеем

$$\frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (B_m^{(2)} \sin m\bar{x} + A_m^{(2)} \cos m\bar{x}) = \tilde{f}_2(\bar{x})$$

при этом свободный член функции Фурье  $\tilde{q}_2(\bar{t}_1)$  задается:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \lim_{z \rightarrow \infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dT_l,$$

Соответственно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{D_l} Q(T_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(t_i) - t_{i+1}) dT_l$$

т.е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 = \frac{A_0^{(2)}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l,$$

где  $A_0^{(2)} = (\alpha_2(0) - \beta_2(0))/2$ . Соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) d\bar{t}_1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \sin m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \sin m\bar{x} + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{q}_2(\bar{t}_1) \cos m\bar{t}_1 d\bar{t}_1 \right] \cos m\bar{x} \right\} = \tilde{q}_2(\bar{x}), \quad \bar{x} \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции  $\tilde{q}_2(\bar{x})$ :

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2(\bar{x}) &= \tilde{f}_2(\bar{x}) - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned} \quad (16)$$

Введем оператор  $A_{2\alpha}$  следующим образом

$$\begin{aligned} A_{2\alpha} \tilde{q}_1(\bar{x}) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=2}^{\infty} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \prod_{i=1}^{l-1} (\alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_i)) - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_{i+1})) d\bar{T}_l - \\ & - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{m^{l-1}} \int_{\bar{D}_l^{(2)}} \tilde{Q}_2(\bar{T}_l) \bar{P}_2(\bar{T}_l, m) \cos m(\bar{x} - \gamma_2^{-1}(\bar{t}_1) - \alpha(\gamma_2^{-1}(\bar{t}_1))). \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда интегральное уравнение (16) может быть записано в виде

$$\tilde{q}_2(\bar{x}) = \tilde{f}_2(\bar{x}) - A_{2\alpha} \tilde{q}_2(\bar{x}) \quad (18)$$

Пусть  $\varphi_1(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in [0, \gamma_1(\pi)]$  и  $\varphi_2(\bar{x})$ ,  $\bar{x} \in [0, \gamma_2(\pi)]$  решения интегральных уравнений (13) и (18) соответственно. На основе ранее установленного сдвига применяется

$$\frac{q(\gamma_1^{-1}(\bar{x}))}{1 - \alpha'(\gamma_1^{-1}(\bar{x}))}, \quad \bar{x} = \gamma_1(x) = x - \alpha(x) \quad \text{и} \quad \frac{q(\gamma_2^{-1}(\bar{x}))}{1 - \alpha'(\gamma_2^{-1}(\bar{x}))}, \quad \bar{x} = \gamma_2(x) = x + \alpha(x) \quad \text{имеем}$$

$$q(x) = (1 - \alpha'(x))\varphi_1(x - \alpha(x)) \quad \text{и} \quad q(x) = (1 + \alpha'(x))\varphi_2(x + \alpha(x)), \quad x \in [0, \pi]. \quad \text{Поэтому}$$

$$(1 - \alpha'(x))\varphi_1(x - \alpha(x)) = (1 + \alpha'(x))\varphi_2(x + \alpha(x)).$$

Так как  $0 < \alpha(x) < 1$ , то  $\text{sgn } \varphi_1(x - \alpha(x)) = \text{sgn } \varphi_2(x + \alpha(x))$ . Кроме того

$$\alpha'(x)[\varphi_1(x - \alpha(x)) + \varphi_2(x + \alpha(x))] = \varphi_1(x - \alpha(x)) - \varphi_2(x + \alpha(x)).$$

Отсюда получаем

$$\alpha'(x) = \frac{\varphi_1(x - \alpha(x)) - \varphi_2(x + \alpha(x))}{\varphi_1(x - \alpha(x)) + \varphi_2(x + \alpha(x))} = 1 - \frac{2\varphi_2(x + \alpha(x))}{\varphi_1(x - \alpha(x)) + \varphi_2(x + \alpha(x))}.$$

Таким образом, приходим к интегральному уравнению для функции  $\alpha$  :

$$\alpha(x) = x - \int_0^x \frac{2\varphi_2(x + \alpha(x))}{\varphi_1(x - \alpha(x)) + \varphi_2(x + \alpha(x))} dx. \quad (19)$$

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье сформированы интегральные уравнения (13), (18) и (19), в которые вводятся нелинейные интегральные операторы (12) и (17) соответственно. Функции  $\tilde{f}_1$  и  $\tilde{f}_2$  получены с помощью коэффициентов Фурье  $a_m^{\tilde{f}_i}$  и  $b_m^{\tilde{f}_i}$ , для которых можно доказать, что  $a_m^{\tilde{f}_i} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$  и  $b_m^{\tilde{f}_i} = O\left(\frac{1}{m^2}\right)$  (теорема 1). Это означает, что производная этих функций принадлежит к классу функций ограниченных вариаций. Остается открытым вопрос о единственности решения уравнений (13) и (18) в классе функций, которые на промежутке  $[0, \pi]$  имеют абсолютно непрерывные производные.

### REFERENCES

- [1] N. Mihaljevich, "Analiz priamoj spektral'noi zadachchi i ustanovka obratnoi zadachi dlia operatora Shturm-Leeuvilia", *Mathematica Montisnigri*, **24**, 13-24 (2015)
- [2] N. Mihaljevic, M. Pikula, "Karakteristichna funkcija operatora tipa Shturm-Leeuvila sa promenljivim kashњeњem", *Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru*, **20**, 403-410 (2003)
- [3] S.B. Norkin, *Differencial'ny'e uravneniia vtorogo poriadka s zapazdyvaiushchim argumentom*, Moskva, Nauka, (1965).
- [4] I.M. Gel'fand, B.M. Levitan, "Ob opredelenii differencial'nogo uravneniia po ego spektral'noi funkcii", *Izv. AN SSSR, Ser. Mat.*, **15**, 309-360 (1951).
- [5] L.E. Elsgolts, S.B. Norkin, *Vvedenie v teoriu differencial'ny'kh uravnenii s otcloniaiushchimsia argumentom*, Moskva, Nauka, (1971).
- [6] R. Lazović, M. Pikula, *Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems*, Radovi matematički, (2002).
- [7] M. Pikula, "Ob opredelenii differencial'nogo uravneniia s peremenny'm zapazdyvanjem", *Mathematica Montisnigri*, **6**, 71-91 (1996).

- [8] M. Pikula, "Opredelenie differentsialnogo operatora Shturma-Leeuvillia s zapazdy`vaiushchim argumentom po dvum spektram", *Matematicheskii` vestneyk*, **43**, 159-171 (1991).
- [9] R.Lazoviћ, *Konstrukcija operatora tipa Shturma-Leeuvila sa kashњeњem*, Doktorska disertacija, Beograd (1998).
- [10] N.Mihaljevich, "A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic", *Mathematica Montisnigri*, **20-21**, 15-34 (2007-2008).
- [11] N.Mihaljevich, M.Pikula, "The inverse Sturm-Liouville problem with changeable delay", *Mathematica Montisnigri*, **16**, 41-68 (2003).
- [12] V.A. Sadovnichii, *Teoriia operatorov*, Moskva, MGU, (1979).
- [13] N.Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.*, **13**, 25-30 (1949).
- [14] N. Mihaljevich, "Asimptotika soobstvenny`kh znachenii operatora tipa Shturm-Leeuvilia s peremenny`m zapazdy`vanijem", *Mathematica Montisnigri*, **28**, 5-16 (2013)
- [15] B.V.Shabat, *Vvedenie v kompleksnyi analiz*, Moskva, Nauka, (1985).
- [16] N. Mihaljevich, "Predstavlenie haraktericheskoi funktsii operatora tipa Shturm-Leeuvillia po nulijam", *Mathematica Montisnigri*, **31**, 25-37 (2014)
- [17] L.V. Ahlfors, *Complex analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, (1953).

*The results were presented at the 16-th International seminar "Mathematical models & modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (5 - 10 June, 2017, Petrovac, Montenegro).*

Received May 12, 2017.