

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ СВОБОДНО-ОБЪЕМНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЬЕЗОПРОВОДНОЙ СРЕДЫ С ГАЗОГИДРАТНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ю.А. ПОВЕЩЕНКО<sup>1,2</sup>, В.О. ПОДРЫГА<sup>1</sup>, П.И. РАГИМЛИ<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия  
e-mail: pvictoria@list.ru, web page: <http://www.keldysh.ru>

<sup>2</sup> Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия  
web page: <http://www.mephi.ru>

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (государственный университет),  
Долгопрудный, Россия  
web page: <http://www.mipt.ru>

**Ключевые слова:** газовые гидраты, фильтрация, математическое моделирование, опорные операторы

**Аннотация.** В работе рассматривается термодинамически равновесная модель двухкомпонентной трехфазной фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями, для которой производится расщепление по физическим процессам. Целью исследования является построение семейства двухслойных полностью консервативных разностных схем метода опорных операторов с профилированными по пространству временными весами в соответствии с предлагаемым алгоритмом расщепления равновесной модели по физическим процессам.

Исходная задача, сформулированная в виде законов сохранения (сохранение массы  $H_2O$ ,  $CH_4$  и полной энергии среды), с общей матрицей системы относительно функции  $S_v$ , характеризующей долю объема в порах, приходящуюся на свободные воду и газ, и функций влагонасыщенности  $S_w$ , давления  $P$  и температуры  $T$  обладает смешанными гиперболическими и параболическими свойствами. Непосредственное нерасщепленное использование такой системы для целей определения динамики переменных и построения неявной разностной схемы, требуемой для расчетов фильтрационных процессов с крупными шагами по времени, затруднительно.

Предложена дискретная модель расщепления по физическим процессам с получением соответствующего разностного уравнения пьезопроводности гидратизированной флюидо-динамической среды. Важно, что полученная таким образом расщепленная модель разностно эквивалентна дискретным исходным законам сохранения системы, записанным в дивергентной форме. Такой подход создания полностью консервативных схем в изучаемой флюидо-гидратной среде потребовал введения специальной свободно-объемной нелинейной аппроксимации сеточных функций по времени, которая зависит от доли объема в порах, занятом флюидами, и является простой в реализации. Применение этих схем также важно в совместном моделировании трехфазной среды с процессами в талой зоне, где гидрат отсутствует,

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65N06, 76N15, 76S05.

**Key words and Phrases:** Gas Hydrates, Filtration, Mathematical Modeling, Support Operators.

поскольку количество неизвестных, уравнений, их типы здесь меняются, и важно на разностном уровне дивергентно передать балансы в различные области течения.

На нерегулярных метрических сетках теории метода опорных операторов применительно к специфике процессов переноса насыщенностей и внутренних энергий воды и газа в гидратизированной среде рассмотрены способы аппроксимации относительной и абсолютной проницаемостей среды, соответствующих этим процессам, наряду с одновременным сохранением континуальных свойств операций *divgrad* в их разностном виде, связанных с полем скоростей, обеспечивающим этот перенос. Это связано с еще одной вычислительной проблемой моделирования процессов фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды, которая заключается в необходимости аппроксимировать квадраты градиентов термодинамических величин (внутренних энергий или давления свободных воды и газа) вблизи депрессионных воронок скважин, имеющих сингулярные особенности. Также градиентные квадратичные формы встречаются в исследуемом в данной работе дискретном уравнении пьезопроводности фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды и определяют динамику нелинейного, квадратичного по градиенту переноса термодинамических параметров среды. Положительную определенность таких квадратичных форм удастся обеспечить привлечением теории метрических сеток метода опорных операторов, однако лишь при сохранении континуальных свойств операций *divgrad* в их разностном виде, связанных с полем скоростей этот нелинейный перенос определяющих. Монотонизация переноса процессов насыщения по функциям  $S_v$ ,  $S_w$  при использовании ее в классическом виде нарушает свойства самосопряженности и знакоопределенности этих дискретных операций векторного анализа. Представленный в данной работе механизм монотонизации сеточного решения обеспечивает одновременно эффективную монотонизацию аппроксимации по  $S_v$ ,  $S_w$ , нелинейному переносу внутренних энергий свободных воды и газа и сохранение знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин в пьезопроводной части задачи.

## ABOUT ONE APPROACH TO FREE-VOLUMETRIC APPROXIMATION OF A PIEZOCONDUCTIVE MEDIUM WITH GAS HYDRATE INCLUSIONS

Y.A. POVESHCHENKO<sup>1,2</sup>, V.O. PODRYGA<sup>1</sup> AND P.I. RAHIMLY<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia  
e-mail: pvictoria@list.ru, web page: <http://keldysh.ru/index.en.shtml>

<sup>2</sup>National Research Nuclear University MEPhI, Moscow, Russia  
web page: <https://eng.mephi.ru/>

<sup>3</sup>Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Dolgoprudny, Mos. Reg., Russia  
web page: <https://mipt.ru/english/>

**Summary.** The paper deals with the thermodynamically equilibrium model of a two-component three-phase filtration fluid dynamics with gas hydrate inclusions, for which the splitting into physical processes is made. The aim of the research is to construct a family of two-layer completely conservative difference schemes based on support operators method with space-time temporal scales in accordance with the proposed algorithm for splitting the equilibrium model into physical processes.

The initial problem, formulated in the form of the conservation laws (conservation of  $H_2O$ ,  $CH_4$  mass and total energy of the medium), with a common matrix of the system relative to the function  $S_v$ , characterizing the volume fraction in the pores, attributable to free water and gas, and the functions of moisture saturation  $S_w$ , pressure  $P$  and temperature  $T$ , has mixed hyperbolic and parabolic properties. The direct unsplit use of such a system for the purpose of determining the dynamics of variables and constructing an implicit difference scheme, which is required for calculations of filtration processes with large steps in time, is difficult.

A discrete model of splitting into physical processes is proposed to obtain the corresponding difference piezoconductivity equation for a hydrated fluid-dynamic medium. It is important that the split model thus obtained is differentially equivalent to the discrete initial conservation laws of the system, written in a divergent form. This approach to the creation of completely conservative schemes in the studied fluid-hydrate medium required the introduction of a special free-volumetric nonlinear approximation of the grid functions in time, which depends on the volume fraction in the pores occupied by the fluids, and is easy to implement. The application of these schemes is also important in the joint modeling of the three-phase medium with processes in the thawed zone where the hydrate is absent, since the number of unknowns, equations, their types here change, and it is important at the difference level to transfer the balances divergently into different flow areas.

On non-regular metric grids of the theory of support operators method applied to the specifics of the processes of transport of saturations and internal energies of water and gas in a hydrated medium, the methods of approximation of relative and absolute permeable medium corresponding to these processes are considered, along with simultaneous preservation of the continual properties of *divgrad* operations in their difference form related to the velocity

field, ensuring this transfer. This is due to one more computational problem of modeling the processes of filtration fluid dynamics of a hydrated medium, which consists in the need to approximate the squares of the gradients of thermodynamic quantities (free water and gas internal energies or pressure) near the depressive funnels of wells with singular features. Also, gradient quadratic forms occur in the discrete equation of the piezoconductivity of the filtration fluid dynamics of a hydrated medium investigated in this paper and determine the dynamics of a nonlinear quadratic on the gradient transfer of the thermodynamic parameters of the medium. The positive definiteness of such quadratic forms can be ensured by invoking the theory of metric grids of the method of support operators, but only if the continuum properties of operations *divgrad* in their difference form are preserved; the operations are related to the velocity field defining this nonlinear transfer. The monotoneization of the transfer of saturation processes by the functions of  $S_v$ ,  $S_w$  when used in a classical form violates the properties of self-adjointness and the sign-definiteness of these discrete operations of vector analysis. The monotoneization mechanism for grid solution presented in this paper provides simultaneous effective monotoneization of approximation in terms of  $S_v$ ,  $S_w$ , nonlinear transfer of internal energies of free water and gas and the preservation of the sign-definiteness of the quadratic forms of the gradients of thermodynamic quantities in the piezoconductivity part of the problem.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Многие пористые материалы, насыщенные одним или несколькими флюидами, испытывают физико-химические превращения твердой фазы. В качестве примера можно указать газовые гидраты, представляющие собой соединения молекул газа и воды. В исходном состоянии, при низкой температуре и высоком давлении поровое пространство полностью или частично заполнено гидратами в твердом состоянии. При повышении температуры и понижении уровня сжатия происходит разложение гидрата на газ и воду. Снижение температуры и повышение давления приводит к образованию гидратов. Огромные запасы углеводородов в газогидратных залежах, могут быть достаточно полно извлечены только с применением технологий добычи, опирающихся на физико-химические превращения пористой среды, что свидетельствуют об актуальности изучения таких превращений.

Наша общая задача состоит в том, чтобы моделировать гидродинамические, геомеханические и физико-химические процессы, происходящие при разработке и исследовании газогидратных месторождений. Обычно они представляют собой пористые слои, насыщенные гидратами, водой и углеводородными газами. Проблема состоит в том, чтобы оптимизировать процессы добычи углеводородного сырья из газогидратных месторождений, обеспечить безопасность работ с газогидратами и решать связанные с ними экологические задачи.

Фильтрационная флюидодинамика свободных воды и газа при наличии в пористой среде твердых гидратных включений обладает рядом специфических особенностей.

Прежде всего, по правилу фаз Гиббса такая термодинамически равновесная двухкомпонентная ( $H_2O$ ,  $CH_4$ ) трехфазная (гидрат и свободные вода и газ) система обладает только одной термодинамической степенью свободы. Т.е. имеет место

термобарическая связь  $T_{dis} = f(P)$  между температурой диссоциации газогидрата и давлением. Понятно, что в этой ситуации за основную термодинамическую переменную можно выбрать любую (например, внутренние энергии воды или газа), если через них выражаются температура и давление. В дальнейшем это нам понадобится, чтобы представить флюидодинамику гидратизированной среды законами Дарси в дискретной энергетической формулировке (см. раздел 4). Однако необходимо иметь в виду, что при расчетах в талой безгидратной зоне в среде имеется два независимых термодинамических параметра  $(P, T)$ . На практике интерес представляет именно динамика совместного поведения спонтанно возникающих пространственно разделенных талых и гидратосодержащих зон. Следующим важным обстоятельством является то, что исходная задача, сформулированная в виде законов сохранения (массы  $H_2O$ ,  $CH_4$  и полной энергии среды), с общей матрицей системы относительно функций  $S_v$ ,  $S_w$ , давления  $P$  и температуры  $T$  обладает смешанными гиперболическими и параболическими свойствами. Непосредственное использование такой системы для целей определения динамики переменных  $S_v, S_w, P, T$  и построения неявной разностной схемы, требуемой для расчетов параболических уравнений с крупными шагами по времени затруднительно.

Наконец, еще одной вычислительной проблемой моделирования фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды является необходимость аппроксимировать квадраты градиентов термодинамических величин (внутренних энергий свободных воды и газа или давлений) вблизи депрессионных воронок скважин, имеющих сингулярные особенности. Также градиентные квадратичные формы встречаются в исследуемом в данной работе дискретном уравнении пьезопроводности фильтрационной флюидодинамики гидратизированной среды и определяют динамику нелинейного, квадратичного по градиенту переноса термодинамических параметров среды. Положительную определенность таких квадратичных форм удастся обеспечить привлечением теории метрических сеток метода опорных операторов [1, 2], однако лишь при сохранении континуальных свойств операций  $divgrad$  в их разностном виде, связанных с полем скоростей этот нелинейный перенос определяющих. Монотонизация уравнений переноса процессов насыщения по  $S_v$  и  $S_w$  нарушает свойства самосопряженности и знакоопределенности этих дискретных операций векторного анализа. Рассматриваемый в разделе 3 данной работы механизм монотонизации сеточного решения обеспечивает одновременно эффективную монотонизацию аппроксимации по функциям  $S_v$  и  $S_w$  наряду с монотонизацией нелинейного переноса внутренних энергий свободных воды и газа и сохранение знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин в пьезопроводной части задачи.

В работах [3, 4] предложена модель фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями частично расщепляющая по физическим процессам исходную постановку задачи. В этих работах из под производной по времени пьезопроводного блока не устранена гидратонасыщенность, что затрудняет дальнейшее численное моделирование.

Газогидраты относятся к метастабильным образованиям и существуют в природе в условиях, близких к границе их фазовой устойчивости. Незначительные изменения температуры и давления способны вызвать необратимый процесс их разложения связанный с освобождением в окружающую среду огромного количества метана и воды, образуя оползни и обвалы, а также привести к превращению прочно сцементированных газогидрат-содержащих пород в разжиженную массу и освобождению огромных количеств газа, делающего данный процесс необратимым. Причины этому могут быть самые разнообразные – вулканическая деятельность, понижение уровня Мирового океана, повышение температуры у основания зоны стабильности за счет продолжающегося процесса седиментации и инженерной деятельности человека. В природе эти процессы наблюдаются и могут послужить разгадкой многих до сих пор непонятных явлений. Газогидраты подвергают опасности основания прибрежных структур.

Неоднородность геологического строения месторождений приводит к неоднородности их физических свойств и существованию изменений характеристик коллекторов от скважины к скважине. Определение свойств коллекторов, в том числе, путем моделирования, является важной частью мероприятий по увеличению эффективности разработки залежей, включающих газогидраты.

Если говорить о техногенных последствиях разработок залежей с газогидратными включениями, то для изучения и предотвращения катастрофических выбросов необходимы специальные методы исследования.

Таким образом, проблема изучения миграции углеводородов в осадочных бассейнах, содержащих газогидраты, имеет общий характер.

Корректное описание соответствующих флюидодинамических процессов должно быть основано на новых моделях [5], которые будут учитывать все существенные физические процессы с требуемой точностью. Эффективность использования таких моделей определяется возможностями выполнения расчетов совокупности нелинейных взаимосвязанных процессов, которым отвечают сильно различающиеся пространственно-временные масштабы [6]. Отсюда вытекает необходимость таких программных реализаций математических моделей, которые пригодны для вычислений на современной компьютерной технике.

В настоящий момент не существует математических алгоритмов и комплексов программ, реализующих в полной мере и во всех фазово-термодинамических состояниях модели эволюции и разработки углеводородных залежей при наличии газогидратов.

С другой стороны изучение газовых гидратов в природных пластах – быстроразвивающаяся область науки, характеризующаяся применением различных теоретических, экспериментальных и промысловых методов с целью нахождения наиболее эффективных и безопасных способов добычи углеводородов из газогидратных залежей [7–10].

Математическое моделирование подземных газовых гидратов имеет давнюю историю и осуществляется в разных направлениях. В ряде работ в одномерном случае путем введения упрощающих предположений задача приводится к автомодельному виду. В результате выбора соответствующих переменных система уравнений в частных производных преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений и исследуется аналитически и численно. Подобный подход использовался [11–15] и

продолжает использоваться [16–22] для решения ряда задач. Было показано, что для термодинамически непротиворечивой постановки задачи от предположения, что диссоциация гидрата происходит в узкой зоне подвижной границы, следует перейти к рассмотрению области объемных фазовых переходов [15]. Исследование автомодельных решений позволяет подробно и глубоко изучить некоторые модельные задачи, которые во многих случаях имеют и прямое практическое значение, например, для анализа работы скважин, но для расчета более сложных задач необходимо использование численных методов. В том числе это важно при исследовании одномерных задач в более сложной постановке. Такие расчеты также проводились в ряде работ ([23, 24] и др.), но методы, предлагаемые в данной работе, позволяют расщепить перенос процессов насыщения и диссипативный блок и использовать неявную схему только для давления, что приводит к повышению скорости метода, особенно в его развитии для неоднородного случая. Кроме того, они дают возможность проводить единый расчет во всей плоскости  $P, T$ .

В качестве первого приближения при решении задач, относящихся к залежи в целом, в ряде работ были разработаны и использованы методы, основанные на уравнениях материального баланса для всей залежи, получаемые осреднением локальных уравнений в предположении постоянства параметров [25–28]. В работе [29] разработана методика моделирования месторождения при помощи разбиения его на вертикальную цепочку блоков с взаимными перетоками. Путем сравнения с решениями, полученными при помощи численного моделирования на примере Мессояхского месторождения, было показано, что с помощью методов материального баланса в случаях не очень сложного геологического строения возможно получить удовлетворительные результаты для средних параметров залежи, таких, как среднее пластовое давление, запасы газа, количество газа, выделившегося при разложении газогидратов [30]. В то же самое время все локальные процессы, в частности, результаты воздействия непосредственно в окрестности скважин, следует изучать с помощью трехмерных моделей с учетом неизотермичности процессов.

В основе методов численного моделирования флюидодинамических процессов в газогидратных залежах лежат те или иные способы дискретизации уравнений механики сплошной среды, описывающих динамику многофазных потоков в пористых материалах. Важную роль здесь играют замыкающие соотношения, такие, как уравнения состояния жидкости, газа и гидрата, кривые фазовых равновесий, уравнения кинетики распада гидрата. Ряд теоретических и экспериментальных исследований связан с изучением этих вопросов, в том числе для использования полученных данных в численном моделировании [31].

Этому же посвящена работа [32]. Основу кинетических моделей диссоциации гидрата составляет уравнение Кима и Бишной [33], связывающее количество выделившегося газа из гидратов с изменением термодинамических параметров – давления и температуры. Задача о разложении гидрата в этом случае сводится к системе уравнений с дополнительными источниками массы в правой части [34]. Так как численные методы решения такой системы хорошо известны [35], эта модель получила широкое распространение [36–38].

На ее базе создаются вычислительные комплексы для расчета флюидодинамики в пласте с учетом газогидратов на основе программ для решения обычных задач подземной гидрогазодинамики с включением блоков, соответствующих термодинамике

гидрата. В мире разработано несколько вычислительных комплексов для расчета флюидодинамики в пласте с учетом газогидратов, например CMG STARS, STOMP-HYD, TOUGH+HYDRATE, разработанный Lawrence Berkeley National Laboratory, США, MH21-HYDRES [39], созданный в рамках национальной гидратной программы в Японии при поддержке ряда научных и коммерческих организаций и др.

Методы основаны на разных подходах, каждый из которых имеет определенные преимущества и недостатки. Для их сравнения на базе The National Energy Technology Laboratory и The U.S. Geological Survey (США) проводятся международные исследования [40]. Постоянно возникают новые методы, например, в Германии – SUGAR на основе PetroMod [41], в Норвегии – RetrasoCodeBright (RCB) [42]. Но в опубликованных работах не описывается подробно методика совместного решения систем уравнений, описывающих процессы в различных областях, каждая из которых характеризуется собственным набором сосуществующих фаз, а согласование вычислительных схем для них не является автоматическим процессом. Поэтому разработка математического и программного обеспечения для решения подобных задач является актуальной задачей.

Сопоставление характерных времен моделируемых процессов в ряде экспериментов, связанных с изучением кинетики разложения гидратов в пористой среде, показывает, что характерное время разложения гидратов составляет  $10^2$ – $10^4$  секунд, тогда как процесс разработки газогидратного месторождения длится годами ( $10^6$ – $10^8$  секунд). Отсюда можно сделать вывод, что в реальных условиях кинетика не будет оказывать существенное влияние на диссоциацию гидрата в пористой среде. Таким образом, наиболее адекватными с физической точки зрения являются математические модели, основанные на балансовых соотношениях в предположении о равновесном характере процесса диссоциации газовых гидратов. Математическая модель, реализуемая в рамках работы, является развитием данного класса моделей.

В работах [43, 44] предложена и численно исследована модель двухкомпонентной трехфазной фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями, в которой производится расщепление по физическим процессам исходных законов сохранения задачи (сохранение массы  $H_2O$ ,  $CH_4$  и полной энергии среды). Расщепление происходит на блок переноса насыщенностей флюидов на фоне заданного поля скоростей (обладающий в основном гиперболическими свойствами) и пьезопроводный блок системы с гидратными включениями, определяющий диссипативную эволюцию термодинамических параметров равновесной флюидогидратной модели. Такое расщепление по физическим процессам позволяет создавать эффективные прикладные алгоритмы расчета с крупным шагом по времени, что невозможно в рамках модели исходных законов сохранения с общей матрицей системы со смешанными гиперболическими и разномасштабными параболическими свойствами.

Целью настоящего исследования является построение семейства двухслойных полностью консервативных разностных схем (ПКРС) метода опорных операторов с профилированными по пространству временными весами в соответствии с предлагаемым алгоритмом расщепления равновесной модели двухкомпонентной трехфазной фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями по физическим процессам. Важно, что полученная таким образом расщепленная модель



разностно эквивалентна дискретным исходным законам сохранения системы, записанным в дивергентной форме. Такой подход создания ПКРС в изучаемой флюидо-гидратной среде потребовал введения специальной свободно-объемной нелинейной аппроксимации сеточных функций по времени, которая зависит от доли объема в порах, занятом флюидами, и является простой в реализации. Применение ПКРС важно в совместном моделировании трехфазной среды с процессами в талой зоне, где гидрат отсутствует, поскольку количество неизвестных, уравнений, их типы здесь меняются и важно на разностном уровне дивергентно передать балансы в различные области течения.

Также в работе на метрических сетках теории метода опорных операторов [1, 2] применительно к специфике процессов переноса насыщенностей в гидратизированной среде рассмотрены способы монотонизации аппроксимации коэффициентов относительной и абсолютной проницаемостей среды, соответствующих этим процессам, наряду с одновременным сохранением континуальных свойств операций *divgrad* в их разностном виде, связанных с полем скоростей, этот перенос обеспечивающим.

## 2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В пространственной области  $O$  с границей  $\partial O$  рассмотрим термодинамически равновесные двухкомпонентные (вода, метан) трехфазные уравнения фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями [43]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[ S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w \right] \right\} + \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + q_w = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[ S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w) \right] \right\} + \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + q_g = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V}_w = - \frac{kk_{rw}}{\mu_w} (\nabla P - g \rho_w \mathbf{k}) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{V}_g = - \frac{kk_{rg}}{\mu_g} (\nabla P - g \rho_g \mathbf{k}) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ m \left[ S_v (S_w \rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_v) \rho_v \varepsilon_v \right] + (1 - m) \rho_s \varepsilon_s \right\} + \\ & + \operatorname{div} \left\{ \rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w + \rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g + [P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] \right\} + \operatorname{div} \mathbf{W} + q_\varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{W} = - \left\{ m \left[ S_v (S_w \lambda_w + (1 - S_w) \lambda_g) + (1 - S_v) \lambda_v \right] + (1 - m) \lambda_s \right\} \nabla T \quad (2.6)$$

$$T_{dis} = f(P) \quad (2.7)$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с интегральным соотношением:

$$\int_O (\mathbf{X} \nabla u) dV + \int_O u \operatorname{div} \mathbf{X} dV = \int_{\partial O} u(\mathbf{X}, ds) \quad (2.8)$$

Принятые обозначения: индексы  $l = g, w, v, s$  относятся к газу, воде, гидрату и скелету пористой среды. Здесь (2.1) – уравнение баланса массы воды, (2.2) – уравнение

баланса массы метана, (2.3) – закон Дарси, определяющий скорость движения свободной воды  $\mathbf{V}_w$  в порах для двухкомпонентной несмешивающейся системы (вода, метан) с абсолютной проницаемостью  $k = k(\mathbf{r}, S_v, P)$  и относительной проницаемостью  $k_{rw} = k_{rw}(S_w)$ .  $\mu_w$  – вязкость воды. Аналогично понимается уравнение (2.4) как закон Дарси для скорости свободного метана  $\mathbf{V}_g$  с относительной проницаемостью  $k_{rg} = k_{rg}(S_w)$  и вязкостью  $\mu_g$ . Наконец, (2.5) – уравнение баланса общей внутренней энергии системы, включающей энергии свободной воды, свободного метана, гидрата и скелета. Под  $\varepsilon_l$  понимаются внутренние энергии единиц массы компонент. Уравнение (2.6) определяет общий тепловой поток  $\mathbf{W}$  в среде с коэффициентами теплопроводности  $\lambda_l(P, T)$ .  $g\mathbf{k}$  – вектор ускорения силы тяжести, направленный вертикально вниз;  $P$  – давление;  $S_w$  – водонасыщенность;  $v$  – гидратонасыщенность;  $S_v = 1 - v$  – растепленность;  $\rho_l(P, T)$  – плотности фаз;  $\beta_w$  – массовая доля воды в гидрате;  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор;  $t$  – время;  $q_w$ ,  $q_g$  и  $q_\varepsilon$  – плотности соответствующих источников, зависящие от параметров ( $t$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $S_w$ ,  $S_v$ ,  $P$ ,  $T$ ). По правилу фаз Гиббса трехфазная двухкомпонентная гидратная система является многовариантной, т.е. обладает одной степенью свободы (температурой или давлением) [45]. Следовательно для газового гидрата, находящегося в равновесии с жидкой водой или льдом, зависимость (2.7) носит однозначный характер.  $u, \mathbf{X}$  в (2.8) – произвольные скаляр (температура, давление, внутренняя энергия и т.п.) и вектор физически связанный с градиентным потоком этой скалярной величины.

Энтальпии единицы массы  $i_l = \varepsilon_l + \frac{P}{\rho_l}$  гидрата, свободных воды и газа термодинамически согласованы в смысле следующего соотношения

$$\beta_w i_w + (1 - \beta_w) i_g = i_v + h \quad (2.9)$$

где  $h$  – скрытая теплота фазового перехода единицы массы гидрата. Для удельных (на единицу массы) энтальпий фаз также справедливо [46]

$$di_l = c_{pl}(-k_{dl}dP + dT) \quad (2.10)$$

с коэффициентами дросселирования

$$k_{dl} = \frac{1}{c_{pl}} \left[ T \left( \frac{\partial V_l}{\partial T} \right)_p - V_l \right] \quad (2.11)$$

Здесь индекс « $p$ » у скобок означает, что частная производная по температуре берется при постоянном давлении;  $c_{pl}$  и  $V_l = \frac{1}{\rho_l}$  – удельные теплоемкости (при постоянном давлении) и объемы фаз. В частности, для газовой фазы с уравнением состояния

$$\rho_g = \frac{P}{z_g RT} \quad (2.12)$$

справедливо

$$k_{dg} = \frac{RT^2}{c_{pg}P} \frac{\partial z_g}{\partial T}, \quad (2.13)$$

что означает наличие эффекта Джоуля-Томсона ( $k_{dg} \neq 0$ ) для неидеального газа с коэффициентом сверхсжимаемости  $z_g$  в изучаемых процессах неизотермической фильтрации.

Из уравнений (2.1), (2.2), (2.5) путем исключения функций  $S_w$  и  $S_v$  из под знака производной по времени может быть получено уравнение пьезопроводности для флюидодинамики с гидратными включениями в следующем виде [43]:

$$\begin{aligned} & m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[ S_w \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + (1-S_w) \frac{1}{\rho_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} \right] + (1-S_v) \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} + \frac{1}{m} \frac{\partial m}{\partial t} \right\} + \\ & + \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[ S_w \rho_w \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} + (1-S_w) \rho_g \frac{\partial \varepsilon_g}{\partial t} \right] + (1-S_v) \rho_v \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right\} + \frac{\partial [(1-m)\rho_s \varepsilon_s]}{\partial t} \right\} + \\ & + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} DIG &= \frac{1}{\rho_w} \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w) + \frac{1}{\rho_g} \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g) + \frac{q_w}{\rho_w} + \frac{q_g}{\rho_g}, \\ DIG_\varepsilon &= [\operatorname{div}(\rho_w \varepsilon_w \mathbf{V}_w) - \varepsilon_w \operatorname{div}(\rho_w \mathbf{V}_w)] + [\operatorname{div}(\rho_g \varepsilon_g \mathbf{V}_g) - \varepsilon_g \operatorname{div}(\rho_g \mathbf{V}_g)] + \\ &+ \operatorname{div}[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g) = \\ &= \rho_w \mathbf{V}_w \nabla \varepsilon_w + \rho_g \mathbf{V}_g \nabla \varepsilon_g + \operatorname{div}[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)] + \operatorname{div} \mathbf{W} + (q_\varepsilon - \varepsilon_w q_w - \varepsilon_g q_g). \end{aligned}$$

Также

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{m\rho_v} &= \left( \varphi - \frac{1}{\rho_v} \right) \geq 0, \quad \varphi = \frac{\beta_w}{\rho_w} + \frac{(1-\beta_w)}{\rho_g}, \\ \delta_\varepsilon &= \beta_w \varepsilon_w + (1-\beta_w) \varepsilon_g - \varepsilon_v \geq 0 \end{aligned}$$

удельные скачки (на единицу массы) при фазовом переходе объема и внутренней энергии соответственно.

Далее также используется обозначение:  $( )_p = \frac{\partial}{\partial P}$ .

Уравнение (2.14) представляет собой основное пьезопроводно-диссипативное термодинамически равновесное уравнение трехфазной двухкомпонентной флюидодинамики с гидратными включениями, расщепленное с блоком переноса процессов насыщения (2.1)-(2.4), обладающим на фоне зафиксированных

термодинамических параметров среды в основном гиперболическими свойствами [43]. Введем новую величину – бароемкость гидратной системы  $D_p$  соотношением:

$$D_p = m\delta_\varepsilon \left\{ S_v \left[ S_w \frac{(\rho_w)_p}{\rho_w} + (1 - S_w) \frac{(\rho_g)_p}{\rho_g} \right] + (1 - S_v) \frac{(\rho_v)_p}{\rho_v} + \frac{(m)_p}{m} \right\} + \frac{\psi}{m\rho_v} \left\{ m \left\{ S_v \left[ S_w \rho_w (\varepsilon_w)_p + (1 - S_w) \rho_g (\varepsilon_g)_p \right] + (1 - S_v) \rho_v (\varepsilon_v)_p \right\} + [(1 - m) \rho_s \varepsilon_s]_p \right\} \quad (2.15)$$

и перепишем уравнение (2.14) в более компактной форме

$$D_p \frac{\partial P}{\partial t} + \delta_\varepsilon DIG + \frac{\psi}{m\rho_v} DIG_\varepsilon = 0 \quad (2.16)$$

В (2.15) берется полная производная по давлению с учетом зависимости (2.7). Воспользовавшись также этой зависимостью (2.7) и выбирая в качестве единственной термодинамической степени свободы в уравнениях (2.3), (2.4), (2.14) соответствующие внутренние энергии  $\varepsilon_w$  и  $\varepsilon_g$ , получим уравнение (2.14) в энергетическом представлении.

### 3 МЕТРИЧЕСКИЕ СЕТКИ МЕТОДА ОПОРНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Для сеток такого типа, состоящих из ячеек ( $\Omega$ ) образованных узлами ( $\omega$ ), гранями ( $\sigma$ ) и ребрами ( $\lambda$ ) характерно наличие замкнутой сопряженной («сдвинутой») сетки, состоящей, например, из доменов  $d(\omega)$  вокруг узлов  $\omega$  (см. рис.1).

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки  $\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$  (см. также ниже). Базисы  $\varphi(\lambda)$  здесь попарно входят в ячейки  $\Omega(\omega)$ , примыкающие к ребру  $\lambda$ . Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки  $\sum_{\varphi(\Omega)} V_\varphi = V_\Omega$ ). Она определяет

конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четыреугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки, а также их мортарные шивки, адаптация (с введением новых узлов в ячейках  $\Omega$ ) с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих «дивергентно-градиентных» операций векторного анализа континуальных краевых задач. Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов  $V_\varphi$  иллюстрируется на примере треугольно-четыреугольной 2D сетки.

В области  $O$  введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек ( $\Omega$ ), базисов ( $\varphi$ ), узлов ( $\omega$ ), ребер ( $\lambda$ ) и связанных с ними ( $\sigma(\lambda)$ ) – границами балансных узловых доменов  $d(\omega)$  (см. рис.1).

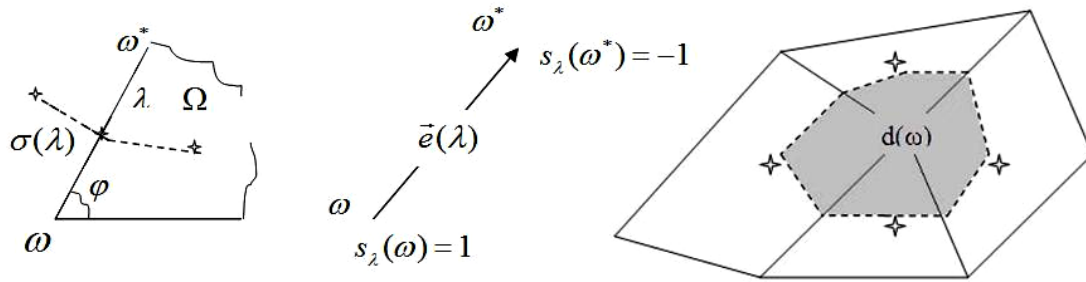


Рис.1. Построение базисов

Базисы  $\varphi$  создаются системой исходных (ковариантных) ортов  $\mathbf{e}(\lambda)$ , образованных ребрами. Под центрами ячеек  $\Omega$  и ребер  $\lambda$  будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов  $\omega$  их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром  $\partial\lambda$ ), представляет собой поверхность

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi} \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$$

ориентированную также как и орт  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Здесь  $\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$  – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами  $\mathbf{e}(\lambda)$ . Базисный объем дается формулой  $v_{\varphi} = \frac{1}{6} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$  для треугольной ячейки  $\Omega$ , содержащей базис  $\varphi$  и  $v_{\varphi} = \frac{1}{4} |\mathbf{e}(\lambda_1) \times \mathbf{e}(\lambda_2)|$  для четырехугольной ячейки, если  $\lambda_1(\varphi)$  и  $\lambda_2(\varphi)$  – ребра, образующие базис  $\varphi$ . Наконец,  $\sum_{\varphi(\lambda)}$  – суммирование по всем базисам  $\varphi$ , в образовании которых приняло участие ребро  $\lambda$ . Замкнутые вокруг узла  $\omega$  поверхности  $\sigma(\lambda(\omega))$  образуют узловые домены  $d(\omega)$ .

Внутреннюю дивергенцию векторного поля  $DIN_W : (\varphi) \rightarrow (\omega)$  определим аппроксимируя теорему Гаусса на  $d(\omega)$ :

$$DIN_W X = \sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega) \tau_{wX}(\lambda),$$

$$\tau_{wX}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} v_{\varphi} (\mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda), \mathbf{X}_{\varphi}),$$

$$\mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda) = W_{\varphi}(\lambda) \cdot \mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda).$$

Здесь  $\sum_{\lambda(\omega)}$  – суммирование по всем ребрам  $\lambda$ , имеющим общий узел  $\omega$ .

Сеточное векторное поле  $X$  задается своими представлениями в базисах  $X_{\varphi}$ . Множители  $W_{\varphi}(\lambda) > 0$ , задаваемые в базисах  $\varphi$  на образующих их ребрах  $\lambda(\varphi)$ , связаны с монотонизацией сеточных решений в следующем смысле. В соответствии с анализом гиперболичности линеаризованной группы уравнений (2.1), (2.2) для

насыщенностей в отсутствии гравитации и при фиксированных давлении и температуре [40] аппроксимация абсолютной проницаемости  $k(S_v)$  выбирается вниз по потоку. Относительные проницаемости  $k_{rw}(S_w)$  и  $k_{rg}(1-S_w)$  берутся вверх по потоку. Это учитывается при выборе множителей  $W_\varphi(\lambda)$ . Отсутствие индекса, здесь обозначаемого как  $w$  в выражениях  $DIN_w X$ ,  $\tau_{wx}(\lambda)$ ,  $e'_{w\varphi}$  и  $GRAD_w u$ , автоматически обозначает  $W_\varphi(\lambda) = 1$  во всех базисах  $\varphi$  на образующих их ребрах  $\lambda(\varphi)$ , т.е. означает отсутствие монотонизации сеточного решения в используемых аппроксимациях в указанном выше смысле.

Обозначая через  $(\ )_\Delta$  аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\begin{aligned} \left( \int_O (\mathbf{X}, \nabla u) dv \right)_\Delta &= - \left( \int_O u \operatorname{div} \mathbf{X} dv - \int_{\partial O} u (\mathbf{X}, \mathbf{ds}) \right)_\Delta \\ &= - \sum_{\omega} (u_\omega, \operatorname{DIN}_w \mathbf{X}) = \sum_{\varphi} v_\varphi (\mathbf{X}_\varphi, \operatorname{GRAD}_w u). \end{aligned}$$

Градиентное векторное поле  $\operatorname{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\varphi)$  дается своими представлениями в базисах

$$\operatorname{GRAD}_w u = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda u \mathbf{e}'_{w\varphi}(\lambda), \quad \Delta_\lambda u = - \sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega) u_\omega = u_{\omega^*} - u_\omega$$

Полагая в базисах  $\varphi$  в качестве  $\mathbf{X}_\varphi$  векторное поле  $\mathbf{X}_{w\varphi} = K_\varphi \operatorname{GRAD}_w u$ , получим самосопряженный неотрицательный оператор  $-\operatorname{DIN}_w \mathbf{X}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$  или  $-\operatorname{DIN}_w K \operatorname{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$ . Здесь потоковое векторное поле  $\mathbf{X}_w$  дается своими компонентами в базисах  $\mathbf{X}_{w\varphi}$ . Оно определяется градиентными свойствами скалярной сеточной функции  $u$ , заданной в узлах  $\omega$  и сеточным симметричным положительно определенным тензорным полем проводимости  $K$ , задаваемым своими представлениями в базисах  $K_\varphi$ . Этот оператор будет строго положительным, если хотя бы в одном граничном узле связанной разностной сетки задана первая краевая задача, т.е. в этом граничном узле скалярная сеточная функция обращается в ноль.

Также считается что с повышением аппроксимации множители монотонизации сеточного решения стремятся к единичным, т.е.  $W_\varphi(\lambda) \rightarrow 1$ . При этом оператор  $-\operatorname{DIN}_w K \operatorname{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$  становится близок к самосопряженному неотрицательному оператору  $\operatorname{DIN}_w K \operatorname{GRAD}_w : (\omega) \rightarrow (\omega)$ , хотя в строгом смысле (за исключением ортогональной сетки) не является самосопряженным и неотрицательным.

Ячейки, состоящие из ортогональных базисов, не нарушают свойств самосопряженности и знакоопределенности оператора  $\operatorname{DIN}_w \operatorname{GRAD}_w$  в строгом смысле несмотря на наличие в их базисах аппроксимационной монотонизации сеточного решения.

Для сохранения свойств самосопряженности и знакоопределенности этого оператора рассмотрим два семейства аппроксимаций.

1. Схемы с ограниченной монотонизацией сеточного решения.

Выделим множество ячеек сетки  $(\Omega^*)$  в которых есть хотя бы один неортогональный базис  $\varphi$  образованный ребрами  $(\lambda(\varphi))$ . Во всех базисах  $(\varphi(\Omega^*))$  внутри этих ячеек  $\Omega^*$  (т.е. может быть и ортогональных) считается  $W_\varphi(\lambda) = 1$ . Т.е. в этих базисах монотонизация сеточного решения отсутствует. Например, зависимость представления тензорного поля проводимости  $K_\varphi$  от “гиперболических” переменных (здесь растепленность  $S_v$ , влагонасыщенность  $S_w$  и т.п.) аппроксимируется непосредственно в центральном узле  $\omega$  сетки образующей базис  $\varphi$ . Такие схемы будут обладать самосопряженным и знакоопределенным оператором  $DIN_w K GRAD : (\omega) \rightarrow (\omega)$ . Однако в них отсутствует монотонизация на множестве ячеек сетки, содержащих неортогональность.

2. Квазимонотонные схемы.

Обозначим через  $(\varphi^*)$  – множество неортогональных базисов сетки. Соответственно  $(\varphi) / (\varphi^*)$  – ортогональные базисы. Для аппроксимации векторного поля  $\mathbf{X} = K grad u$  введем  $\mathbf{X}_{w\varphi} = K_\varphi GRAD_w^* u$ ,  $GRAD_w^* u = \begin{cases} GRAD u, & \varphi \in (\varphi) / (\varphi^*) \\ GRAD_w u, & \varphi \in (\varphi^*) \end{cases}$ .

Эти схемы также будут обладать самосопряженным и знакоопределенным оператором  $DIN_w K GRAD_w^* : (\omega) \rightarrow (\omega)$ . Поскольку с повышением аппроксимации множители монотонизации сеточного решения стремятся к единичным, т.е.  $W_\varphi(\lambda) \rightarrow 1$ , то операторы  $GRAD_w : (\omega) \rightarrow (\varphi)$  и  $GRAD : (\omega) \rightarrow (\varphi)$ , аппроксимируют дифференциальный оператор  $grad$ . В отличие от схем с ограниченной монотонизацией, квазимонотонные схемы наряду с самосопряженностью и знакоопределенностью оператора  $DIN_w K GRAD_w^* : (\omega) \rightarrow (\omega)$  в неортогональных базисах сетки  $(\varphi^*)$  сохраняют монотонность в “главном” смысле при вычислении потоков в сопряженных базисных направлениях.

Подходы 1 и 2 можно применять и локально, т.е. только в части неортогональных базисов  $(\varphi^{**})$ , где на этапе “предиктор” (явный временной слой, известная итерация и т.п.) не выполняется условие  $(GRAD u, GRAD_w u) \geq 0$ . Для схем с ограниченной монотонизацией при этом генерируется соответствующее множество ячеек  $(\Omega^{**})$ , в образовании которых принимал участие хотя бы один базис из  $(\varphi^{**})$ . Такие локально регуляризируемые в смысле знакоопределенности оператора  $divgrad$  схемы не будут обладать строгими свойствами знакоопределенности и самосопряженности этого оператора. Однако с точки зрения физических приложений сохранение знакоопределенности квадратичных форм в указанном выше смысле является полезным, поскольку позволяет правильно аппроксимировать точный квадрат градиента термодинамических величин в депрессионных воронках скважин, в частности, связанный с этим эффект Джоуля-Томсона в рассматриваемых ниже процессах неизотермической фильтрации.

В рассматриваемой модели фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями механизм монотонизации сеточного решения  $W_\varphi(\lambda) > 0$ , с учетом исследованной в [43] гиперболичности (с отсутствующей гравитацией,  $g=0$ ), системы (2.1), (2.2), обеспечивает эффективную монотонизацию сеточных решений по  $S_v$ ,  $S_w$  и  $S_g = 1 - S_w$ , наряду с сохранением знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин, в пьезопроводной части рассматриваемой ниже дискретной связной задачи неизотермической фильтрации.

В соответствии с исследованиями [43] абсолютная проницаемость  $k(S_v)$  в базисах  $\varphi$  на ребрах  $(\lambda(\varphi))$ , образующих эти базисы всегда выбирается вниз по потоку (по растепленности). Относительные проницаемости  $k_{rw}(S_w)$  и  $k_{rg}(1 - S_w)$ , как правило, берутся вверх по потоку (по влаго- и газонасыщенностям), т.е. как и в двухфазной талой зоне с отсутствием гидрата. Однако в соответствии с анализируемыми в [43] условиями устойчивости здесь возможна также аппроксимация вниз по потоку (по влаго- и газонасыщенностям).

#### 4 СВОБОДНО-ОБЪЕМНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ДИВЕРГЕНТНО-ПЬЕЗОПРОВОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ ФЛЮИДОДИНАМИКИ С ГАЗОГИДРАТНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Введем обозначения для функций сетки метода опорных операторов (п.3, см. также рис.1). К ее узлам  $\omega$  будем относить ранее представленные в континуальной модели величины

$$\overline{m}, S_v, S_w, \rho_v, \rho_w, \rho_g, \rho_s, P, T, \varepsilon_v, \varepsilon_w, \varepsilon_g, \varepsilon_s, \mu_w, \mu_g, k_{rw}, k_{rg}, q_w, q_g, q_\varepsilon$$

К базисам сетки  $\varphi$  в соответствии с п.3 отнесем векторные функции

$$\mathbf{V}_w, \mathbf{V}_g, \nabla P, \nabla T, \mathbf{W}$$

Сеточные функции, представляющие разрывные материальные свойства веществ, отнесем к ячейкам  $\Omega$

$$m, k, \lambda_v, \lambda_w, \lambda_g, \lambda_s.$$

Очевидны также соотношения

$$\overline{m}_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi m_{\Omega(\varphi)}, \quad \overline{(1-m)}_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi (1 - m_{\Omega(\varphi)}) = V_\omega - \overline{m}_\omega, \quad V_\omega = \sum_{\varphi(\omega)} V_\varphi,$$

т.е.  $\overline{m}_\omega$  и  $\overline{(1-m)}_\omega$  представляют собой объем порового домена  $d(\omega)$  (см. рис.1) и его каркасной части соответственно.

Далее на временных слоях  $t$  и  $\hat{t} = t + \tau$  ( $\tau > 0$  – шаг по времени) введем разностные производные по времени и пространственно-точечные (т.е. в узлах сетки  $\omega$ ) временные интерполяции  $a_t = (\hat{a} - a) / \tau$ ,  $a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta)a$ . Здесь интерполяционный вес  $\delta$  может зависеть от узла пространственной сетки  $\omega$ . Например, под величиной



$$\delta_v = \sqrt{(\overline{mS_v})^\wedge} / \left( \sqrt{(\overline{mS_v})^\wedge} + \sqrt{(\overline{mS_v})} \right), \quad 0 < S_v < 1$$

будем понимать свободно-объемную временную аппроксимацию заданных в узлах  $\omega$  сеточных функций. Т.е. интерполяционный вес  $\delta_v$  определяется долей объема пор, предназначенного для свободного движения жидкости и газа. Выбор такой аппроксимации позволит нам в дальнейшем производить дискретные преобразования уравнений, связанные с их расщеплением по физическим процессам, близкие к континуальным. Другие произвольные интерполяции по времени будем обозначать как  $[ ]^\sim$ . Они могут относиться не только к узлам сетки  $\omega$ , но и к другим ее элементам (базисам  $\varphi$  и т.п.).

Понимая под индексом  $S$  в операциях векторного анализа  $DIN_s$  и  $GRAD_s$  один из описанных выше видов монотонизации сеточного решения (либо ее отсутствие), монотонизирующей перенос по насыщенностям  $S_w$  и  $S_v$ , запишем аппроксимацию уравнений (2.1), (2.2) и (2.5) в следующем виде.

Уравнения неразрывности, представляющие собой баланс массы водной и газовой компонент

$$\left\{ \overline{m} [S_v S_w \rho_w + (1 - S_v) \rho_v \beta_w] \right\}_t^\sim + DIN_s(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim + q_w^\sim = 0, \quad (4.1)$$

$$\left\{ \overline{m} [S_v (1 - S_w) \rho_g + (1 - S_v) \rho_v (1 - \beta_w)] \right\}_t^\sim + DIN_s(\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim + q_g^\sim = 0. \quad (4.2)$$

С помощью оператора  $GRAD_s$  потоки воды  $(\rho_w \mathbf{V}_w)^\sim$  и газа  $(\rho_g \mathbf{V}_g)^\sim$  аппроксимируются в базисах сетки  $\varphi$  с учетом дискретизации закона Дарси (2.3), (2.4), например, на неявном слое по времени любым из стандартных способов [1, 47].

$$(\rho_w \mathbf{V}_w)_\varphi^{p^\sim} = - \left( \rho_w \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta\varphi}^\sim GRAD_s P^- + \left( \rho_w^2 \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta\varphi}^\sim \mathbf{gk},$$

$$(\rho_g \mathbf{V}_g)_\varphi^{p^\sim} = - \left( \rho_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta\varphi}^\sim GRAD_s P^- + \left( \rho_g^2 \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta\varphi}^\sim \mathbf{gk}.$$

Здесь под  $( )_{\Delta\varphi}^\sim$  понимаются аппроксимации соответствующих выражений в базисах сетки  $\varphi$  с некоторой интерполяцией по времени.

Однако при наличии термобарической зависимости вида (2.7) для сохранения континуальных свойств знакоопределенности квадратичных форм градиентов термодинамических величин вида  $\int \varepsilon \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) dV$  (см. также (4.5) ниже) более предпочтительна форма закона Дарси в энергетической формулировке. Получим ее из следующих соображений.

С учетом термобарической зависимости (2.7) в зоне трехфазного равновесия гидрат-вода-газ можно написать

$$d\varepsilon_w = \varepsilon'_{wp} dP, \quad d\varepsilon_g = \varepsilon'_{gp} dP,$$

где  $\varepsilon'_{wp}$  и  $\varepsilon'_{gp}$  – полные производные от внутренней энергии по давлению с учетом (2.7).

Тогда закон Дарси (2.3), (2.4) в базисах сетки  $\varphi$  (образованных узлами, в которых выполнено термобарическое соотношение (2.7)) представим в энергетической форме:

$$\begin{aligned} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} &= - \left( \rho_w \frac{kk_{rw}}{\mu_w \varepsilon_{wp}} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s \varepsilon_w^{(\delta_v)} + \left( \rho_w^2 \frac{kk_{rw}}{\mu_w} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} \mathbf{gk}, \\ (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} &= - \left( \rho_g \frac{kk_{rg}}{\mu_g \varepsilon_{gp}} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} GRAD_s \varepsilon_g^{(\delta_v)} + \left( \rho_g^2 \frac{kk_{rg}}{\mu_g} \right)_{\Delta\varphi}^{\sim} \mathbf{gk}. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim} &= \{ (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p \sim} \mid (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} \}, \\ (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\sim} &= \{ (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p \sim} \mid (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\varepsilon \sim} \} \end{aligned}$$

Уравнение баланса внутренней энергии, аппроксимирующее (2.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\left\{ \bar{m} \left[ S_w (\rho_w \varepsilon_w + (1 - S_w) \rho_g \varepsilon_g) + (1 - S_w) \rho_v \varepsilon_v \right] + \overline{(1 - m)} \rho_s \varepsilon_s \right\}_t + \\ &+ DIN_s \left[ \left( \varepsilon_w^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim} \right] + DIN_s \left[ \left( \varepsilon_g^{(\delta_v)} \right)_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{\sim} \right] + DIN \left\{ \left[ P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g) \right]_{\varphi}^{\sim} \right\} + \\ &+ DIN \mathbf{W}^{\sim} + q_{\varepsilon}^{\sim} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Индекс *up* в выражении для энергии воды  $(\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up}$  обозначает, что соответствующие величины берутся вверх (*up wind*) по водному потоку  $(\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim}$  в определенной ранее дивергенции  $DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{\sim}$ . Аналогично индекс *up* понимается в выражении для энергии газа  $(\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up}$ .

Работа сил давления  $[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_{\varphi}^{\sim}$  и полный поток тепла  $\mathbf{W}^{\sim}$  в среде аппроксимируются в базисах сетки  $\varphi$ , например, на неявном слое по времени стандартным образом [1, 47]:

$$[P(\mathbf{V}_w + \mathbf{V}_g)]_{\varphi}^{\sim} = \left( \frac{P}{\rho_w} \right)_{\varphi}^{\sim} (\rho_w \mathbf{V}_w)_{\varphi}^{p \sim} + \left( \frac{P}{\rho_g} \right)_{\varphi}^{\sim} (\rho_g \mathbf{V}_g)_{\varphi}^{p \sim}$$

Далее, дискретный аналог пьезопроводно-диссипативного уравнения (2.14), физически расщепленного с блоком переноса процессов насыщения (4.1), (4.2), но разностно эквивалентный системе исходных законов сохранения модели (4.1)-(4.3), имеет вид:

$$\begin{aligned} & \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} \left\{ [(\bar{m}S_v)S_w]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_w)_t}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_g)_t}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} + \right. \\ & \left. + [\bar{m}(1-S_v)]^{(1-\delta_v)} \frac{(\rho_v)_t}{(\rho_v)^{(\delta_v)}} + (\bar{m})_t \right\} + \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & + [\psi / (m\rho_v)] \sim \left\{ [(\bar{m}S_v)S_w\rho_w]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_w)_t + [(\bar{m}S_v)(1-S_w)\rho_g]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_g)_t + \right. \\ & \left. + [\bar{m}(1-S_v)\rho_v]^{(1-\delta_v)} (\varepsilon_v)_t + [(1-m)\rho_s\varepsilon_s] \right\} + \delta_{\varepsilon}^{(\delta_v)} DIG \sim + [\psi / (m\rho_v)] \sim DIG \sim_{\varepsilon} = 0, \\ & \delta_{\varepsilon} = [\beta_w\varepsilon_w + (1-\beta_w)\varepsilon_g] - \varepsilon_v, \\ & [\psi / (m\rho_v)] \sim = \left[ \beta_w / (\rho_w)^{(\delta_v)} + (1-\beta_w) / (\rho_g)^{(\delta_v)} \right] - 1 / (\rho_v)^{(\delta_v)}, \\ & DIG \sim = \frac{1}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w) \sim + \frac{1}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g) \sim + \frac{q_w \sim}{(\rho_w)^{(\delta_v)}} + \frac{q_g \sim}{(\rho_g)^{(\delta_v)}} \\ & DIG \sim_{\varepsilon} = \left[ DIN_s \left\{ (\varepsilon_w^{(\delta_v)})_{up} (\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \right\} - (\varepsilon_w)^{(\delta_v)} DIN_s (\rho_w \mathbf{V}_w) \sim \right] + \\ & + \left[ DIN_s \left\{ (\varepsilon_g^{(\delta_v)})_{up} (\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \right\} - (\varepsilon_g)^{(\delta_v)} DIN_s (\rho_g \mathbf{V}_g) \sim \right] + \end{aligned} \quad (4.5)$$

В выражении  $DIG \sim_{\varepsilon}$ , входящем в (4.4), имеет место монотонная (вверх по потоку) энергетическая аппроксимация для  $\varepsilon_w^{(\delta_v)}$  и  $\varepsilon_g^{(\delta_v)}$  в соответствующих комбинациях дивергентных выражений, содержащих эти величины.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на метрических сетках теории метода опорных операторов применительно к процессам двухкомпонентной трехфазной фильтрационной флюидодинамики с газогидратными включениями построено семейство расщепленных по физическим процессам дискретных алгоритмов (полностью консервативных разностных схем) со свободно-объемной аппроксимацией уравнения пьезопроводности в гидратизированной среде. Эти алгоритмы позволяют производить прикладные расчеты с крупным шагом по времени и разностно эквивалентны системе исходных законов сохранения.

Также в работе применительно к специфике переноса процессов насыщения в фильтрационной гидратизированной среде рассмотрены различные способы монотонизации сеточного решения, наряду с одновременным сохранением свойств знакоопределенности и самосопряженности дифференциальных операторов  $divgrad$ , связанных с полем скоростей, этот перенос обеспечивающим. Это позволяет более качественно аппроксимировать градиентные перепады термодинамических величин в депрессионных воронках скважин, эффект Джоуля – Томсона и другие физические процессы, присущие теории неизотермической фильтрации.

**Благодарности:** Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 17-71-20118).

## REFERENCES

- [1] A.V. Koldoba, Yu.A. Poveshchenko, I.V. Gasilova, E.Yu. Dorofeeva, “Raznostnye skhemy metoda opornykh operatorov dlia uravnenii teorii uprugosti”, *Matem. modelirovanie*, **24** (12), 86-96 (2012).
- [2] A.A. Samarskii, A.V. Koldoba, Yu.A. Poveshchenko, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii, *Raznostnye skhemy na neregularnykh setkakh*, Minsk: Kriterii, (1996).
- [3] E.A. Bondarev, V.V. Popov, “Dinamika obrazovaniia gidratov pri dobyche prirodnogo gaza”, *Vychislitelnye tekhnologii*, **7** (1), 28-33 (2002).
- [4] A.V. Shchebetov, *Sozдание metodov prognozirovaniia effektivnosti tekhnologii razrabotki gazogidratnykh zalezhei*, M.: Dissertatsiia, (2007).
- [5] A.G. Kaptilnyi, A.A. Karabutov, “Transport processes in extended non-equilibrium thermodynamics”, *Mathematica Montisnigri*, **36**, 86-103 (2016).
- [6] V.I. Mazhukin, A.V. Shapranov, A.V. Mazhukin, O.N. Koroleva, “Mathematical formulation of a kinetic version of Stefan problem for heterogeneous melting/crystallization of metals”, *Mathematica Montisnigri*, **36**, 58-77 (2016).
- [7] Yu.F. Makogon, *Gidraty prirodnykh gazov*, M.: Nedra, (1974).
- [8] Yu.F. Makogon, *Hydrates of hydrocarbons*, Tulsa: Pennwell Publishing C., (1997).
- [9] V.A. Istomin, V.S. Yakushev, *Gazovye gidraty v prirodnykh usloviakh*, M.: Nedra, (1992).
- [10] V.T. Gudzenko, A.A. Varenichev, M.P. Gromova, “Gazogidraty. Informatsionno-analiticheskii obzor”, *Geologiya, geofizika i razrabotka neftianyykh i gazovykh mestorozhdenii*, **5**, 39-68 (2016).
- [11] N.V. Cherskii, E.A. Bondarev, “O teplovom metode razrabotki gazogidratnykh zalezhei”, *DAN SSSR*, **203** (3), 550-552 (1972).
- [12] N.N. Verigin, I.L. Khabibullin, G.A. Khalikov, “Lineinaiia zadacha o razlozhenii gidratov gaza v poristoi srede”, *Izv. AN SSSR: Mekhanika zhidkosti i gaza*, **1**, 174-177 (1980).
- [13] Yu.P. Korotaev, *Izbrannye trudy: v 3-kh tomakh*, pod red. R.I. Viakhireva, M.: Nedra, **1**, (1996).
- [14] N.N. Verigin, I.L. Khabibullin, G.A. Khalikov, “Axisymmetric problem of heat and mass transfer in saturated porous medium”, *Journal of Engineering Physics*, **38** (5), 581-585 (1980).
- [15] E.A. Bondarev, A.M. Maksimov, G.G. Tsypkin, “K matematicheskomu modelirovaniu dissotsiatsii gazovykh gidratov”, *DAN SSSR*, **308** (3), 575-578 (1989).
- [16] R.I. Nigmatulin, V.Sh. Shagapov, V.R. Syrtlanov, “Avtomodelnaia zadacha o razlozhenii gazogidratov v poristoi srede pri depressii i nagreve”, *PMTF*, **39** (3), 111-118 (1998).
- [17] G.G. Tsypkin, *Techeniia s fazovymi perekhodami v poristykh sredakh*, M.: Fizmatlit, (2009).
- [18] D.S. Dzhaifarov, *Matematicheskoe modelirovanie dissotsiatsii gazogidratov v prilozhenii k interpretatsii issledovaniu skvazhin gazogidratnykh mestorozhdenii na nestatsionarnykh rezhimakh filtratsii*, M.: Dissertatsiia, (2015).
- [19] Z.A. Vasil’eva, S.I. Efimov, V.S. Yakushev, “ Prediction of thermal interaction between oil/gas wells and intra-permafrost metastable gas hydrates ”, *Earth’s Cryosphere*, **20** (1), 60-63 (2016).
- [20] G.G. Tsypkin, “Formation of hydrate in injection of liquid carbon dioxide into a reservoir saturated with methane and water”, *Fluid Dynamics*, **51** (5), 672-679 (2016).
- [21] M.K. Khasanov, N.G. Musakaev, “Gas hydrate formation in porous ice rich methane reservoirs upon injection of carbon dioxide: forward modeling”, *Earth’s Cryosphere*, **20** (3), 59-65 (2016).
- [22] V.Sh. Shagapov, A.S. Chiglintseva, A.A. Rusinov, “Matematicheskoe modelirovanie protsessa obrazovaniia gidrata v plaste nasyshchennogo snegom pri nagnetanii kholodnogo gaza”, *Vychislitelnaia mekhanika splotnykh sred*, **9** (2), 173-181 (2016).
- [23] V.I. Vasil’ev, V.V. Popov, G.G. Tsypkin, “Numerical investigation of the decomposition of gas hydrates coexisting with gas in natural reservoirs”, *Fluid Dynamics*, **41** (4), 599-605 (2006).

- [24] E.A. Bondarev, I.I. Rozhin, V.V. Popov, K.K. Argunova, "Assessment of possibility of natural gas hydrates underground storage in permafrost regions", *Earth's Cryosphere*, **19** (4), 58-67 (2015).
- [25] S.N. Zakirov, R.S. Bogatyrenko, "Balansovye sootnosheniia dlia gazogidratnoi zalezhi", *Gazovaia promyshlennost*, **5**, (1979).
- [26] R.S. Bogatyrenko, *Osobennosti razrabotki i ekspluatatsii gazogidratnykh mestorozhdenii (na primere Messoiakhskogo mestorozhdeniia)*, M.: Dissertatsiia, (1979).
- [27] D.A. Dubrovskii, *Sozdanie metodik analiza i prognozirovaniia pokazatelei razrabotki gazogidratnykh zalezhei*, M.: Dissertatsiia, (1989).
- [28] V.A. Nenahov, M.B. Panfilov, "Matematicheskaia model protsessa istoshcheniia gaz-gazogidratnoi zalezhi", *Trudy MINKh i GP*, **174**, 38-48 (1983).
- [29] A.L. Suhonosenko, *Termogidrodinamicheskoe modelirovanie protsessov razrabotki gazogidratnykh mestorozhdenii*, M.: Dissertatsiia, (2013).
- [30] A.N. Dmitrievsky, A.V. Karakin, Yu.A. Poveshchenko, G.I. Kazakevich, P.I. Rahimly, "Gidrodinamicheskoe modelirovanie gidratnogo mestorozhdeniia", *Geologiya, geofizika i razrabotka neftiannykh i gazovykh mestorozhdenii*, **2**, 30-35 (2017).
- [31] M.P. Galanin, V.T. Zhukov, N.V. Klushnev, V.V. Lukin, A.S. Rodin, "On the solving of conjugate problems for definition of parameters of wrap and heat exchange between elements of constructions", *Mathematica Montisnigri*, **39**, 5-17 (2017).
- [32] H. Gao, H.A. Li, "Pore structure characterization, permeability evaluation and enhanced gas recovery techniques of tight gas sandstones", *J. of Natural Gas Science and Engineering*, **28**, 536-547 (2016).
- [33] H.C. Kim [et al.], "Kinetics of methane hydrate decomposition", *Chemical engineering science*, **42** (7), 1645-1653 (1987).
- [34] M.H. Yousif [et al.], "Experimental and theoretical investigation of methane-gas-hydrate dissociation in porous media", *SPE reservoir Engineering*, **6** (1), 69-76 (1991).
- [35] K. Aziz, A. Settari, *Petroleum reservoir simulation*, London and New York: Elsevier Applied Science Publishers, (1979).
- [36] N. Goel, M. Wiggins, S. Shah, "Analytical modeling of gas recovery from *in Situ* hydrates dissociation", *Journal of Petroleum Science and Engineering*, **29** (2), 115-127 (2001).
- [37] S. Khataniar [et al.], "Modeling and economic analysis of gas production from hydrates by depressurization method", *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **80** (1), 135-143 (2002).
- [38] L. Jeannin [et al.], "Formation & Dissociation of Methane Hydrates in Sediments. Part II: Numerical modelling", *Proc. 4th International Conference on Gas Hydrates*, May 2002, Yokohama, Japan (2002).
- [39] M. Kurihara [et al.], "Gas production from methane hydrate reservoirs", *Proc. 7th International Conference on Gas Hydrates*, July 2011, Edinburgh, UK (2011).
- [40] J.W. Wilder [et al.], "An international effort to compare gas hydrate reservoir simulators", *Proc. of 6th International Conference on Gas Hydrates*, July 2008, Vancouver, Canada (2008).
- [41] E. Pinero [et al.], "3-D numerical modelling of methane hydrate accumulations using PetroMod", *Marine and Petroleum Geology*, **71**, 288-295 (2016).
- [42] K. Qorbani, B. Kvamme, "Non-equilibrium simulation of CH<sub>4</sub> production from gas hydrate reservoirs through the depressurization method", *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, **35**, 1544-1554 (2016).
- [43] Yu.A. Poveshchenko, G.I. Kazakevich, "Matematicheskoe modelirovanie gazogidratnykh protsessov", *Matematicheskie mashiny i sistemy*, **3**, 105-110 (2011).
- [44] P.I. Rahimly, Yu.A. Poveshchenko, O.R. Rahimly, V.O. Podryga, G.I. Kazakevich, I.V. Gasilova, "Ispolzovanie rasshepleniiia po fizicheskim protsessam dlia modelirovaniia dissotsiatsii gazovykh gidratov", *Matem. modelirovanie*, **29** (7), 133-144 (2017).

- [45] S.Sh. Byk, Yu.F. Makogon, V.I. Fomina, *Gazovye gidraty*, M.: Khimiia, (1980).
- [46] L.D. Landau E.M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, **7**, Oxford: Pergamon Press ltd., (1970).
- [47] A.V. Koldoba, Yu.A. Poveschenko, E.A. Samarskaya, V.F. Tishkin, *Metody matematicheskogo modelirovaniia okruzhaiushchei sredy*, M.: Nauka, (2000).

Received September 1, 2017.