

## МОДЕЛЬ СВЕРХЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ БИНАРНОГО ГАЗА

Т.А. КУДРЯШОВА, С.В. ПОЛЯКОВ

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл. 4, 125047, Москва, Россия  
e-mail: kudryashova@imamod.ru - web page: <http://www.keldysh.ru>

e-mail: polyakov@imamod.ru, web page: <http://www.imamod.ru/~serge>

**Ключевые слова:** Математическое моделирование, газовые смеси, молекулярная динамика.

**Аннотация.** Моделирование сверхзвуковых течений газовых смесей является существенной частью большого круга научно-технических проблем, в том числе оно актуально при исследованиях газодинамических процессов вблизи различных космических объектов и летательных аппаратов, составляет основу многих микро- и нанотехнологий. Цель данной работы – создание математической модели, позволяющей исследовать течения смеси газов в случае частичного нарушения гипотезы сплошности среды. В подобной ситуации предлагается использовать комбинацию макроскопического и микроскопического подходов.

### 1 ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается проблема моделирования течений газовых смесей в случае приближения числа Кнудсена к границе применимости приближения сплошной среды. Одним из примеров такой ситуации можно считать истечение сверхзвуковых газовых струй в вакуум, а также взаимодействие струй с шероховатыми поверхностями и др. Для определенности остановимся на задаче сверхзвукового течения бинарной смеси газов в микроканалах технических систем. Математическая модель такого течения не может быть полностью сформулирована в рамках макроскопического подхода. Обычно в такой ситуации для описания течения смеси используют либо уравнения Навье-Стокса со специальными граничными условиями на стенках канала, либо переходят к решению уравнения Больцмана в том, или ином приближении. Оба способа имеют свои плюсы и минусы. Решение на основе уравнений Навье-Стокса позволяет существенно сократить вычислительные затраты, однако число Кнудсена в рамках такого подхода не может быть больше 0.1. Решение на основе уравнения Больцмана [1] получается на порядок более затратным, однако диапазон чисел Кнудсена сверху ничем не ограничен. Он ограничен снизу величинами порядка 0.01, поскольку для меньших значений числа Кнудсена вычислительная процедура на базе уравнения Больцмана становится абсолютно неприемлемой с точки зрения вычислительных затрат.

Если задача решается в небольшой пространственной области на малых временах, то имеется также возможность применения молекулярно-динамического подхода. Молекулярная динамика является одним из наиболее мощных вычислительных подходов, эффективно применяемых для моделирования физических, химических и

биологических процессов. Метод молекулярной динамики (ММД) обладает высоким пространственно-временным разрешением и позволяет получить информацию о процессах, происходящих в атомно-молекулярных масштабах и на временах порядка нескольких наносекунд. Использование ММД в полном объеме для реальных размеров области и конечных промежутков времени представляется пока преждевременным, даже при наличии очень мощных суперкомпьютеров. На наш взгляд наиболее продуктивным подходом к задачам подобного класса может оказаться комбинация макроскопического подхода (например, на основе уравнений Эйлера, Навье-Стокса или квазигазодинамики), описывающего среднее поле течения, и коррекция характеристик течения с помощью статистических подходов (например, на основе метода крупных частиц, уравнения Больцмана или ММД).

В данной работе макроскопический подход базируется на уравнениях квазигазодинамики (КГД), а коррекция параметров течения производится с помощью ММД. Предлагаемый общий алгоритм расчёта представляет собой расщепление по физическим процессам. КГД система рассматривается в релаксационном приближении и является обобщением квазигазодинамических уравнений на случай смеси газов. Она решается методом конечных объёмов на подходящей сетке. Система уравнений молекулярной динамики используется в качестве подсеточного алгоритма (применяющегося внутри каждого контрольного объёма). В рамках ММД алгоритма взаимодействие частиц описывается с помощью потенциала, который определяется исходя из свойств моделируемого вещества, его агрегатного и термического состояний. Для расчета сил взаимодействия молекул используется хорошо зарекомендовавший себя потенциал Леннарда-Джонса, позволяющий с минимальными вычислительными затратами получать достаточно точные результаты для систем, характеризующихся парным взаимодействием, в частности, для инертных газов.

## 2 МАКРОСКОПИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Макроскопические квазигазодинамические (КГДМ) уравнения [2, 3] динамики бинарной смеси газов запишем в инвариантном относительно системы координат виде. Они включают системы уравнений для обоих газов, которые имеют одинаковый вид.

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_l + \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \rho_l u_{l,i} = \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \tau \left( \sum_{j=1,2,3} \nabla_j \rho_l u_{l,i} u_{l,j} + \nabla_i p_l \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_l u_{l,k} + \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \rho_l u_{l,i} u_{l,k} + \nabla_k p_l = \quad (2)$$

$$= \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \tau \left( \sum_{j=1,2,3} \nabla_j \rho_l u_{l,i} u_{l,j} u_{l,k} + \nabla_i p_l u_{l,k} + \nabla_k p_l u_{l,i} \right) + \nabla_k \tau \nabla_i p_l u_{l,i} + S_l^u,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_l + \sum_{i=1,2,3} \nabla_i u_{l,i} (E_l + p_l) = \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \tau \left( \sum_{j=1,2,3} \nabla_j (E_l + 2p_l) u_{l,i} u_{l,j} + \frac{1}{2} \nabla_i u_{l,k} u_{l,k} p_l \right) + \quad (3)$$

$$+ \frac{\gamma_l}{\gamma_l - 1} \sum_{i=1,2,3} \nabla_i \tau \left( \frac{p_l}{\rho_l} \nabla_i p_l + \text{Pr}_l^{-1} p_l \nabla_i \frac{p_l}{\rho_l} \right) + S_l^E,$$

$$E_l = \sum_{i=1,2,3} \rho_l u_{li}^2 / 2 + p_l / (\gamma_l - 1), \quad p_l = \rho_l \mathfrak{R}_l T_l = m_l n_l \mathfrak{R}_l T_l = \frac{i_l}{2} n_l k_B T_l, \quad l = a, b. \quad (4)$$

$$S_a^u = \nu_{ab} \rho_a (\mathbf{u}_a^* - \mathbf{u}_a), \quad S_b^u = \nu_{ba} \rho_b (\mathbf{u}_b^* - \mathbf{u}_b), \quad (5)$$

$$S_a^E = \nu_{ab} (E_a^* - E_a), \quad S_b^E = \nu_{ba} (E_b^* - E_b), \quad (6)$$

Предполагаем, что смесь состоит из газов **a** и **b** с числовыми плотностями (концентрациями)  $n_a$  и  $n_b$  и массовыми плотностями  $\rho_a = m_a n_a$  и  $\rho_b = m_b n_b$ , где  $m_a$  и  $m_b$  – массы молекул газов **a** и **b**. Каждый газ характеризуется своей температурой  $T_l$  и макроскопической скоростью  $\mathbf{u}_l$ , где  $l = a, b$ . Другие параметры компонент смеси:  $p_l$  – парциальное давление,  $E_l$  – плотность полной энергии. Газовая постоянная каждой компоненты равна  $\mathfrak{R}_l = k_B / m_l$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана, показатель адиабаты  $\gamma_l$ , число степеней свободы молекул  $i_l = i_{l, \text{пост}} + i_{l, \text{вращ}} + 2i_{l, \text{колеб}}$ . Обменные члены  $S_l^u, S_l^E$  имеют вид (5)-(6). В них  $\mathbf{u}_l^*, E_l^*$  – векторы скорости и плотности полной энергии, позволяющие учесть перераспределение импульса и энергии между компонентами смеси;  $\nu_a$  и  $\nu_b$  – частоты взаимных столкновений между молекулами одного сорта;  $\nu_{ab}$  – частота взаимных столкновений между молекулами сорта **a** с молекулами сорта **b**;  $\nu_{ba}$  – частота взаимных столкновений между молекулами сорта **b** с молекулами сорта **a**.

$$\nu_{ab} = \nu_a \left( \frac{d_{ab}}{d_a} \right)^2 \sqrt{\frac{m_a + m_b}{2m_b} \frac{n_b}{n_a}}, \quad \nu_a = \frac{p_a}{\mu_a} \Omega(\omega_a, \alpha_a), \quad d_{ab} = \frac{d_a + d_b}{2}, \quad (7)$$

$$\nu_{ba} = \nu_{ab} \frac{n_a}{n_b} = \nu_b \left( \frac{d_{ab}}{d_b} \right)^2 \sqrt{\frac{m_a + m_b}{2m_a} \frac{n_a}{n_b}}, \quad \nu_b = \frac{p_b}{\mu_b} \Omega(\omega_b, \alpha_b).$$

$$\Omega(\omega_l, \alpha_l) = \frac{5(\alpha_l + 1)(\alpha_l + 2)}{\alpha_l(7 - 2\omega_l)(5 - 2\omega_l)}, \quad l = a, b. \quad (8)$$

Здесь  $d_l$  – диаметры молекул,  $\mu_l$  – значения вязкости компонент смеси.

В дальнейшем будет использоваться  $\alpha_l = 1$ , что соответствует модели твердых сфер (VHS). Тогда

$$\Omega(\omega_l, 1) = \Omega(\omega_l) = \frac{30}{(7 - 2\omega_l)(5 - 2\omega_l)}, \quad l = a, b. \quad (9)$$

Формулы для вязкости компонент смеси

$$\mu_l = \mu_{l, \text{ref}} \left( \frac{T_l}{T_{\text{ref}}} \right)^{\omega_l}, \quad l = a, b. \quad (10)$$

Формулы длин свободного пробега для компонент смеси

$$\lambda_l = \frac{4\mu_l}{\rho_l \sqrt{\mathfrak{K}_l T_l}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Omega(\omega_l, 1)}} = \frac{\mu_l}{\rho_l \sqrt{\mathfrak{K}_l T_l}} A_l, \quad (11)$$

$$A_l = \frac{2(7-2\omega_l)(5-2\omega_l)}{15\sqrt{2\pi}}, \quad l = a, b.$$

Скорости звука для компонент смеси  $a_l = \sqrt{\gamma_l \mathfrak{K}_l T_l}$ ,  $l = a, b$ .

Параметры смеси определяются следующим образом

$$\rho = \rho_a + \rho_b, \quad \mathbf{u} = \frac{\rho_a \mathbf{u}_a + \rho_b \mathbf{u}_b}{\rho}, \quad p = p_a + p_b, \quad E = E_a + E_b, \quad (12)$$

$$n = n_a + n_b, \quad T = \frac{n_a T_a + n_b T_b}{n}, \quad m = \frac{m_a n_a + m_b n_b}{n},$$

$$\mathfrak{K} = \frac{p}{\rho T} = \frac{\rho_a \mathfrak{K}_a + \rho_b \mathfrak{K}_b}{\rho} = \frac{k_B}{m}, \quad \tau = \frac{\mu}{p}.$$

Для определения вязкости смеси используем формулу Уилки [2]

$$\mu = \mu_a \left( 1 + G_{ab} \frac{\rho_b M_a}{\rho_a M_b} \right)^{-1} + \mu_b \left( 1 + G_{ba} \frac{\rho_a M_b}{\rho_b M_a} \right)^{-1}, \quad (13)$$

$$G_{ab} = \left( 1 + \sqrt{\frac{\mu_a}{\mu_b}} \sqrt{\frac{M_b}{M_a}} \right)^2 \left( 2 \sqrt{2 \left( 1 + \frac{M_a}{M_b} \right)} \right)^{-1}.$$

Здесь  $M_a$  и  $M_b$  – молярные массы газов  $a$  и  $b$ .  $G_{ba}$  вычисляется аналогично путем циклической замены индексов. Средняя длина свободного пробега для смеси

$$\lambda = \frac{m_a \lambda_a + m_b \lambda_b}{m_a + m_b}. \quad (14)$$

Средняя скорость звука в смеси

$$a = \frac{m_a a_a + m_b a_b}{m_a + m_b}. \quad (15)$$

Числа Маха и Рейнольдса для смеси

$$Ma = \frac{|\mathbf{u}|}{a}, \quad Re = \frac{\rho |\mathbf{u}| \lambda}{\mu}. \quad (16)$$

Определение величин  $\bar{\mathbf{u}}_l, \bar{E}_l$  требует специального рассмотрения. Для этого ниже рассматривается модель межмолекулярного взаимодействия.

### 3 МОДЕЛЬ МЕЖМОЛЕКУЛЯРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Параметры компонент смеси, являющиеся результатом обменного взаимодействия, определяются из следующих условий: 1) плотность компонент в результате суммарных актов столкновений отдельных молекул не изменяется; 2) среди всех типов столкновений молекул учитываются только парные, как наиболее вероятные [4, 5]; 3) принимается определённая модель удара, в данном случае модель твёрдых сфер [5].

Применение модели твёрдых сфер базируется на решении уравнений молекулярной динамики. Для включения этих уравнений в наше рассмотрение зафиксируем некоторый момент времени  $t$  и выделим некоторую точку пространства  $\mathbf{r}=(x, y, z)$ . Вокруг этой точки выделим некоторый достаточно малый объём  $V$ . В этом объёме макропараметры смеси  $\rho, \mathbf{u}, E, p, T$ , можно считать постоянными в течение некоторого малого промежутка времени  $\Delta t$ . Однако межмолекулярные взаимодействия в объёме  $V$  за этот промежуток времени изменяют состояние молекулярной системы, а именно: изменяются положения молекул (радиус-векторы  $\mathbf{r}$ ) и их скорости ( $\mathbf{c} = \dot{\mathbf{r}}$ ). Рассмотрим этот процесс подробнее.

В объёме  $V$  в соответствии с исходными данными содержится  $N_l = n_l V$  молекул сорта  $l$ . Эти молекулы имеют в момент времени  $t$  положения  $\mathbf{r}_{l,i}$  и скорости  $\mathbf{c}_{l,i}$  ( $i=1, \dots, N_l, l=a, b$ ). В результате взаимодействия спустя время  $\Delta t$  положения и скорости молекул будут определяться векторами  $\mathbf{r}_{l,i}^*$  и  $\mathbf{c}_{l,i}^*$ . Переход из одного состояния в другое осуществляется в соответствии с уравнениями Ньютона:

$$m_l \frac{d\mathbf{c}_{l,i}}{dt} = \mathbf{F}_{l,i}, \quad \frac{d\mathbf{r}_{l,i}}{dt} = \mathbf{c}_{l,i}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{F}_{l,i}$  – равнодействующая всех сил, действующих на молекулу  $(l,i)$ . Если не учитывать внешние силы (например, силу тяжести и др.), то равнодействующая сила связана лишь с межмолекулярными взаимодействиями. Поэтому её можно представить как градиент потенциальной энергии молекулы:

$$\mathbf{F}_{l,i} = -\nabla_{\mathbf{r}_{l,i}} U_{l,i}, \quad U_{l,i} = \sum_{(l',i') \neq (l,i)} \varphi_{l,l'}(|\mathbf{r}_{l,i} - \mathbf{r}_{l',i'}|). \quad (18)$$

Здесь  $\varphi_{l,l'}$  – потенциал парного взаимодействия молекул. Наиболее часто употребляемым потенциалом в случае газов и их смесей является потенциал в форме Леннарда-Джонса [6]:

$$\varphi_{l,l'}(|\mathbf{r}_{l,i} - \mathbf{r}_{l',i'}|) = 4\varepsilon_{l,l'} \left[ \left( \frac{\alpha_{l,l'}}{|\mathbf{r}_{l,i} - \mathbf{r}_{l',i'}|} \right)^{12} - \left( \frac{\alpha_{l,l'}}{|\mathbf{r}_{l,i} - \mathbf{r}_{l',i'}|} \right)^6 \right], \quad (19)$$

$$\alpha_{l,l'} = \sqrt[6]{2}\sigma_{l,l'}, \quad \varepsilon_{l,l'} = \sqrt{\varepsilon_l \varepsilon_{l'}}, \quad \sigma_{l,l'} = \frac{\sigma_l + \sigma_{l'}}{2},$$

где  $\varepsilon_l$  – энергии связи молекул сорта  $l$ ,  $\sigma_l$  – длины связи между молекулами сорта  $l$ .

Для использования уравнений молекулярной динамики нужно знать начальное состояние системы в момент времени  $t$ . Для этого можно использовать следующее предположение. В момент времени  $t$  нам известны не только макропараметры смеси, но и макропараметры её компонент  $\rho_l, \mathbf{u}_l, E_l, p_l, T_l$ . При этом молекулы газов распределены по объёму  $V$  равномерно, а их скорости удовлетворяют распределению Максвелла. Вместе с тем, можно взять и другие распределения координат и скоростей, которые удовлетворяют условиям:

$$\langle \mathbf{r}_l \rangle = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{r}_{l,i} = \mathbf{r}, \quad \langle \mathbf{c}_l \rangle = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{c}_{l,i} = \mathbf{u}_l, \quad l = a, b. \quad (20)$$

Выбрав конкретное начальное состояние системы, можно по уравнениям Ньютона найти новые значения  $\mathbf{r}_{l,i}^*$  и  $\mathbf{c}_{l,i}^*$  для каждой молекулы. Теперь необходимо найти макропараметры компонент смеси и смеси в целом. Они находятся из следующих равенств:

$$\mathbf{c}_{l,i}^* \rightarrow \mathbf{u}_l^* = \frac{1}{N_l} \sum_{i=1}^{N_l} \mathbf{c}_{l,i}^*, \quad \mathbf{u}^* = \frac{m_a n_a \mathbf{u}_a^* + m_b n_b \mathbf{u}_b^*}{m_a n_a + m_b n_b}; \quad (21)$$

$$\mathbf{u}_{l,T}^* = \mathbf{u}_l^* - \mathbf{u}^*, \quad T_l^* = \frac{m_l |\mathbf{u}_{l,T}^*|^2}{i_l k_B} = \frac{|\mathbf{u}_{l,T}^*|^2}{i_l \mathfrak{R}_l}, \quad T^* = \frac{n_a i_a T_a^* + n_b i_b T_b^*}{n_a i_a + n_b i_b};$$

$$p_l^* = \rho_l \mathfrak{R}_l T_l^*, \quad p^* = \rho \mathfrak{R} T^*; \quad E_l^* = \frac{\rho_l |\mathbf{u}_l^*|^2}{2} + \frac{p_l^*}{\gamma_l - 1}, \quad E^* = E_a^* + E_b^*.$$

Таким образом, определены все параметры течения.

#### 4 ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Для численного решения сформулированной проблемы применяется сеточный подход и расщепление по физическим процессам. Для этого в исследуемой области пространства вводится подходящая сетка (регулярная или не регулярная в зависимости от геометрии области). Далее строится конечно-объёмная схема, аппроксимирующая уравнения квазигазодинамики. Расщепление проводится на каждом шаге по времени. Оно состоит в том, что сначала по макроуравнениям рассчитываются параметры течения для каждой компоненты газовой смеси. При этом не учитывается их обменное взаимодействие. Далее проводится цикл подсеточных вычислений на базе уравнений

Ньютона, который позволяет в конечном итоге вычислить обменные слагаемые для КГД уравнений. Завершающим этапом является коррекция импульсов и энергий компонент смеси, а также расчёт параметров течения смеси как целого.

Газодинамические макроуравнения можно решать явным методом. При этом один шаг КГДМ соответствует серии шагов по методу молекулярной динамики. Примеры геометрии, граничные условия, и аппроксимация системы КГД уравнений на сетках различного типа приводятся в работах [2, 7, 8, 9].

Для решения уравнений Ньютона предлагается использовать алгоритм Верле [5]:

$$\mathbf{r}_{a,i}^n, \mathbf{c}_{a,i}^n, \mathbf{a}_{a,i}^n \rightarrow \mathbf{r}_{a,i}^{n+1}, \mathbf{c}_{a,i}^{n+1}, \mathbf{a}_{a,i}^{n+1} : \quad (22)$$

$$\mathbf{r}_{a,i}^{n+1} = \mathbf{r}_{a,i}^n + \mathbf{c}_{a,i}^n \Delta t + \mathbf{a}_{a,i}^n \frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad \mathbf{a}_{a,i}^{n+1} = \frac{\mathbf{F}_{a,i}^{n+1}}{m_a}, \quad \mathbf{c}_{a,i}^{n+1} = \mathbf{c}_{a,i}^n + \frac{1}{2}(\mathbf{a}_{a,i}^n + \mathbf{a}_{a,i}^{n+1}) \Delta t;$$

Здесь  $\Delta t$  – шаг интегрирования (по времени),  $n$  – номер шага,  $a$  – ускорение частицы, получаемое подстановкой рассчитанных по формуле (18) значений  $F$  в правую часть уравнений (17). При выборе временного шага следует учитывать, что достаточно большая его величина приводит к несохранению полной энергии и неустойчивым численным решениям, т.е. к таким, которые все больше отклоняются с течением времени от истинного решения. С другой стороны, размер шага интегрирования определяет реальное время моделирования системы. Существенно малый временной шаг может привести к тому, что за время компьютерного эксперимента система не достигнет равновесия.

Для решения задачи по схеме Верле необходимо сначала задать распределение молекул обоих газов по контрольному объёму (например, равномерное), а также их скорости (например, в соответствии с распределением Максвелла). Далее с более мелким шагом по времени провести расчёты по следующему алгоритму:

- 1) Расчет новых координат частиц  $\mathbf{r}_i^{n+k/m}$  соответствующих моменту времени  $t^{n+k/m} = t^n + \frac{k}{m} \Delta t$ , где  $m$  – число разбиений основного шага интегрирования по времени.
- 2) Проверка граничных условий.
- 3) Вычисление значения парциальной  $U_i^{n+k/m}$  и суммарной потенциальной энергии системы  $U^{n+k/m}$  частиц и сил  $\mathbf{F}_i^{n+k/m}$ , действующих на частицы.
- 4) Расчет новых скоростей частиц  $\mathbf{V}_i^{n+k/m}$ .
- 5) Вычисление кинетической энергии системы  $KE^{n+k/m}$ .
- 6) Вычисление полной энергии системы  $E^{n+k/m}$ .

Этапы 1) – 6) повторяются по  $k=1, \dots, m$ . В случае сильного изменения энергии уменьшается основной шаг по времени  $\Delta t$ .

После получения нового состояния системы частиц производится обратный переход к макропараметрам компонент смеси, а также вычисляются макропараметры смеси в целом:  $\rho, \mathbf{u}, E, p, T$ .

Изложенная процедура повторяется на каждом шаге по времени.

## 5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение можно отметить, что предлагаемый в работе смешанный подход, объединяющий макроскопическое и микроскопическое описания, представляется достаточно эффективным для моделирования газодинамических процессов в переходных режимах. Разработанная модель является новой и требует дальнейшего детального исследования на конкретных задачах [10].

## 6 БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 11-01-12086-офи-м, 12-01-00339).

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] V. Garzo, A. Santos and J.J. Brey. A kinetic model for a multicomponent gas. // *J. Phys. Fluids A* 1(2), 1989.
- [2] T.G. Elizarova, Quasi-gasdynamics equations. *Springer*, 286 p.p., 2009 .
- [3] Yau Wu and C.H.Lee. Kinetic Theory of Shock Tube Problems for Binary Mixtures. *The Physics of Fluent* , V.14, Number 2, 1971, 313-322 p..
- [4] G.A.Bird. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flow. Oxford Science simulations. 1994.
- [5] Дж. Гиршфельдер, Ч. Кертисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей. Издательство иностранной литературы. Москва. 1961г
- [6] В.О. Подрыга. Моделирование процесса установления термодинамического равновесия методом молекулярной динамики // Математическое моделирование. – 2010. – Т. 22 , №. 11. – С. 39–48
- [7] И.А. Граур, Т.Г. Елизарова, Т.А. Кудряшова, С.В. Поляков. Численное исследование струйных течений с использованием многопроцессорных систем. Математическое моделирование. 2002, 14(6), 51-62.
- [8] Т.А. Кудряшова, С.В. Поляков, А.А. Свердлин. Расчёт параметров течения газа вокруг спускаемого аппарата. // Математическое моделирование, 2008, 20(8), с. 119-128.
- [9] Кудряшова Т.А., Поляков С.В., Свердлин А.А. Моделирование двух- и трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных вычислительных системах. / Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ им. М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г., Тезисы докладов. - М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. С. 69-70.
- [10] A. Ramos, G. Tejada, J.M. Fernandez, S. Montero. Nonequilibrium Processes in Supersonic Jets of N<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>, and N<sub>2</sub> + H<sub>2</sub> Mixtures: (I) Zone of Silence. *J. Phys. Chem. A* 2009, 113, 8506–8512 p.p.