

К РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

НИКОЛА МИХАЛЕВИЧ

Университет Черногории, Морской факультет
Котор, Черногория

Ключевые слова: рефлексивное банахово пространство, вещественный функционал, гильбертово пространство

Аннотация. В данной статье рассматривается вопрос о разрешимости уравнения типа $Ax + BT(B^*x) = 0$ и $z + AT(z) = 0$ где $A, B \in L(X, X^*)$ и нелинейный оператор T представим в сумме потенциального и максимального монотонных операторов, действующих из X^* в X (X - рефлексивное банахово пространство).

Пусть X вещественное рефлексивное банахово пространство; X^* пространство, сопряженное пространству X ; $f(x)$ - вещественный функционал на X^* , дифференцируемый по Гато, $\text{grad } f(x) = F(x)$ и A, B линейный ограниченный операторы из X в X^* .

Пусть $\omega(x, y)$ вещественный функционал на X^2 удовлетворяющий условиям:

а) $\frac{\partial \omega(x, y)}{\partial y} = 0$ при $x = y$,

б) непрерывный на любом конечномерном подпространстве из X^2 ,

в) для фиксированного $y \in X$ слабо полунепрерывен сверху по x .

Лемма 1. Пусть $G : D_G \subset X^* \rightarrow X$ деминепрерывный оператор. Обозначим $D_{GB^*} = \{x \in X : B^*x \in D_G\}$. Положим $S_R(U) = S_R \cap U$, где $S_R = \{x \in X : \|x\| \leq R\}$ и $U \subset D_{GB^*}$ конечномерное пространство. Пусть далее, для фиксированного $x \in X$ функционал $\omega(x, y) + f(B^*y)$ строго выпуклый. Тогда

$$\exists x_u \in S_R(U) \forall y \in S_R(U):$$

$$\begin{aligned} \langle Ax_u, x_u \rangle + \langle G(B^*x_u), B^*x_u \rangle + \omega(x_u, x_u) + f(B^*x_u) &\leq \\ &\leq \langle Ax_u, y \rangle + \langle G(B^*x_u), B^*y \rangle + \omega(x_u, y) + f(B^*y). \end{aligned}$$

Доказательство. Положим

$$\psi(x, y) = \langle Ax, y \rangle + \langle G(B^*x), B^*y \rangle + \omega(x, y) + f(B^*y).$$

Пусть ψ_U сужение ψ на $S_R(U)$. Для каждого фиксированного $x \in S_R(U)$ существует $\varphi(x) \in S_R(U)$ такое, что

$$\psi_U(x, \varphi(x)) = \inf_{y \in S_R(U)} \psi_U(x, y).$$

Так, как по предположению функционал $\omega(x, y) + f(B^*y)$ строго выпуклый, то $\varphi(x)$ является однозначным отображением шара $S_R(U)$ в себя. Покажем что φ непрерывное отображение на $S_R(U)$. Пусть x_0 произвольная фиксированная точка из $S_R(U)$ и $\langle x_n \rangle \subset S_R(U)$, произвольная последовательность, сходящаяся к x_0 . Положим $y_n = \varphi(x_n)$. Пусть $\langle y_{n_k} \rangle$ подпоследовательность последовательности $\langle y_n \rangle$, предел которой равен некоторому элементу y_0 . Так как оператор G деминепрерывен, то будем иметь

$$\begin{aligned} \psi_U(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_U(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_U(x_{n_k}, y) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\langle Ax_{n_k}, y \rangle + \langle G(B^*x_{n_k}), B^*y \rangle + \omega(x_{n_k}, y)) + f(B^*y) = \\ &= \langle Ax_0, y \rangle + \langle G(B^*x_0), B^*y \rangle + \omega(x_0, y) + f(B^*y) = \psi_U(x_0, y). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\psi_U(x_0, y_0) = \inf_{y \in S_R(U)} \psi_U(x_0, y).$$

В силу строгой выпуклости функционала $\psi_U(x_0, y)$, $y_0 = \varphi(x_0)$. Таким образом, для каждой содящейся подпоследовательности $\langle y_{n_k} \rangle$ имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = \varphi(x_0).$$

Так как последовательность $\langle y_n \rangle$ ограничена, то отсюда получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0)$, т.е. $\varphi \in C(x_0)$. Последнее означает, что отображение $\varphi : S_R(U) \rightarrow S_R(U)$ непрерывно, в силу произвольности элемента $x_0 \in S_R(U)$. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке имеем

$$\exists x_U \in S_R(U) : x_U = \varphi(x_U)$$

т.е.

$$\exists x_U \in S_R(U) : \psi_U(x_U, x_U) = \inf_{y \in S_R(U)} \psi_U(x_U, y),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Пусть выполнены условия леммы 1 и

$$\forall x \in U, \|x\| = R : \langle Ax + BT(B^*x), x \rangle > 0 \quad (1)$$

где $T(x) = F(x) + G(x)$. Тогда $\|x_u\| < R$.

Доказательство. Допустим противное, т.е. $\|x_u\| = R$. Тогда вещественная функция $\varphi(t) = \psi_U(x_u, x_u + t(-x_u))$ для достаточно малых $t > 0$ удовлетворяет неравенству $\varphi(t) \geq \varphi(0)$, т.е. $\varphi'(0) \geq 0$. Но

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\psi_U(x_u, x_u + t(-x_u)) - \psi_U(x_u, x_u)}{t} = \\ &= \langle \text{grad}_y \psi_U(x_u, x_u), -x_u \rangle = \langle Ax_u + BT(B^*x_u), -x_u \rangle = \\ &= -\langle Ax_u + BT(B^*x_u), x_u \rangle, \end{aligned}$$

что невозможно.

Замечание 1. Условие (1) будет выполнено если, например:

- а) $A > 0$, $\langle T(B^*x), B^*x \rangle \geq 0$, $x \in U$, $\|x\| = R$, или
- б) $A \geq 0$, $\langle T(B^*x), B^*x \rangle > 0$, $x \in U$, $\|x\| = R$.

Пусть P_U проекция X на U . Тогда, в силу леммы 1 и следствия 1 имеем

$$P_U^*Ax_u + P_U^*BG(B^*x_u) + P_U^*BF(B^*x_u) = 0.$$

Пусть $G : D_G \subset X^* \rightarrow X$ деминепрерывный оператор, D_{GB^*} - линейное многообразие полностью плотно в X и F ограниченный оператор в шаре $B^*S_R = \{B^*x : x \in S_R\}$. Через Γ обозначим семейство конечномерных подпространств $U \subset D_{GB^*}$ частично упорядоченных по включению. Положим, $T(x) = G(x) + F(x)$.

Лемма 2. Пусть выполнены условия

- 1° для фиксированного $x \in X$ функционала $\omega(x, y) + f(B^*y)$ строго выпуклого по y ,
- 2° $\forall x \in D_{GB^*}$, $\|x\| = R : \langle Ax + BT(B^*x), x \rangle > 0$.

Тогда существуют x_0 и $\omega_0 \in X^*$ такие, что для всякого подпространства $E \in \Gamma$ ($x_0 \in E$) существует подпоследовательность $\langle x_u^s \rangle$, $x_u^s \xrightarrow{w} x_0$, $s \rightarrow +\infty$, $\forall s \in N$: $E \subset U_s$ и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s, x_u^s \rangle + \langle G(B^*x_u^s), B^*x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^*x_u^s) \right) \leq$$

$$\leq \langle Ax_0 + \omega_0, y \rangle + \omega(x_0, y) + f(y), \quad y \in S_R(E).$$

Доказательство. Для всякого $U \in G$, в силу леммы 1, определим $x_u \in S_R(U)$. Так как последовательность $\langle x_u \rangle$ ограничена, можно выделить подпоследовательность $\langle x_u^\alpha \rangle$, которая слабо сходится к некоторому элементу $x_0 \in S_R$, причем имеет место равенство

$$P_{U_\alpha}^* Ax_u^\alpha + P_{U_\alpha}^* BG(B^* x_u^\alpha) + P_{U_\alpha}^* BF(B^* x_u^\alpha) = 0.$$

Отсюда из ограниченности оператора $F(x)$ в шаре $B^* S_R$ следует ограниченность последовательности $\langle P_{U_\alpha}^* BG(B^* x_u^\alpha) \rangle$. Следовательно, найдется подпоследовательность последовательности $\langle P_{U_\alpha}^* BG(B^* x_u^\alpha) \rangle$, обозначим ее снова $\langle P_{U_\alpha}^* BG(B^* x_u^\alpha) \rangle$, которая слабо сходится к некоторому $\omega_0 \in X^*$.

Пусть $E \in \Gamma$, $x_0 \in E$. Рассмотрим все возможные конечномерные подпространства $U_\alpha \in \Gamma$, $E \subseteq U_\alpha$. В силу теоремы Эберлейна-Шмульяна о слабой компактности, существует счетная подпоследовательность $\langle x_u^s \rangle$ такая, что $x_u^s \xrightarrow{w} x_0$, $s \rightarrow +\infty$.

Далее, для $y \in S_R(E)$ имеем

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} (\langle Ax_u^s + BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s)) = \\ & = \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} (\langle Ax_u^s, x_u^s \rangle + \langle P_{U_s}^* BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s)) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} (\langle Ax_u^s, y \rangle + \langle P_{U_s}^* BG(B^* x_u^s), y \rangle + \omega(x_u^s, y) + f(B^* y)) \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} (\langle Ax_u^s, y \rangle + \langle P_{U_s}^* BG(B^* x_u^s), y \rangle + f(B^* y)) + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \omega(x_u^s, y) \leq \\ & \leq \langle Ax_0 + \omega_0, y \rangle + f(B^* y) + \omega(x_0, y), \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

Теорема 1. Пусть выполнены условия леммы 2 и

- 1° отображение $G : D_G \subset X^* \rightarrow X$ максимально монотонно,
- 2° функционал $\langle Ax, x \rangle + \omega(x, x) + f(B^* x)$ слабо полунепрерывен снизу
- 3° существует ограниченный оператор $B^{-1} : X^* \rightarrow X$.

Тогда $\exists x_0 \in S_R : Ax_0 + BT(B^* x_0) = 0$.

Доказательство. В начале покажем что $\forall x \in D_{GB^*} \cap S_R$ выполняется неравенство

$$\langle BG(B^* x) - \omega_0, x - x_0 \rangle \geq 0$$

(x_0 и ω_0 из леммы 2). Пусть $x \in D_{GB^*} \cap S_R$ и $E \in \Gamma$ - подпространство которое содержит x и x_0 . Пусть далее, $\langle x_u^s \rangle$ последовательность определенная леммой 2. Тогда

$$\begin{aligned} & \langle Ax_0, x_0 \rangle + \omega(x_0, x_0) + f(B^* x_0) + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s, x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s) \right) + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \leq \\ & \leq \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s + BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s) \right) \leq \\ & \leq \langle Ax_0 + \omega_0, y \rangle + \omega(x_0, y) + f(B^* y), \quad y \in S_R(E). \end{aligned}$$

Так как $x_0 \in S_R(E)$, то полагая $y = x_0$ получаем

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \leq \langle \omega_0, x_0 \rangle.$$

Далее

$$\begin{aligned} & \langle BG(B^* x) - \omega_0, x - x_0 \rangle = \langle BG(B^* x), x - x_0 \rangle - \langle \omega_0, x \rangle + \langle \omega_0, x_0 \rangle \geq \\ & \geq \langle BG(B^* x), x - x_0 \rangle - \langle \omega_0, x \rangle + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle = \\ & = \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle BG(B^* x), x - x_u^s \rangle - \langle P_{U_s}^* BG(B^* x_u^s), x \rangle \right) + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle = \\ & = \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle BG(B^* x), x - x_u^s \rangle - \langle BG(B^* x_u^s), x \rangle \right) + \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \geq \\ & = \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle BG(B^* x), x - x_u^s \rangle - \langle BG(B^* x_u^s), x \rangle + \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \right) = \\ & = \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle BG(B^* x) - BG(B^* x_u^s), x - x_u^s \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует что

$$\langle G(B^* x) - B^{-1} \omega_0, B^* x - B^* x_0 \rangle \geq 0.$$

В силу условия 1° теоремы следует, что $B^* x_0 \in D_G$, $B^{-1} \omega_0 = G(B^* x_0)$ и

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \leq \langle G(B^* x_0), B^* x_0 \rangle \quad (2)$$

Из

$$\langle G(B^* x_u^s) - G(B^* x_0), B^* x_u^s - B^* x_0 \rangle \geq 0$$

получаем

$$\langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle \geq \langle G(B^* x_0), B^* x_u^s - B^* x_0 \rangle + \langle G(B^* x_u^s), B^* x_0 \rangle,$$

т.е.

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle &\geq \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle G(B^* x_0), B^* x_u^s - B^* x_0 \rangle + \langle G(B^* x_u^s), B^* x_0 \rangle \right), \\ \lim_{s \rightarrow +\infty} \langle G(B^* x_u^s), B^* x_u^s \rangle &\geq \langle G(B^* x_0), B^* x_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \langle BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle = \langle BG(B^* x_0), x_0 \rangle.$$

Пусть теперь $y \in S_R$ и $E \in \Gamma$ выбрано так, что $x_0, y \in E$. Тогда

$$\begin{aligned} &\langle Ax_0 + BG(B^* x_0), x_0 \rangle + \omega(x_0, x_0) + f(B^* x_0) \leq \\ &\leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s, x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s) \right) + \lim_{s \rightarrow +\infty} \langle BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle \leq \\ &\leq \lim_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s + BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s) \right) \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{s \rightarrow +\infty} \left(\langle Ax_u^s + BG(B^* x_u^s), x_u^s \rangle + \omega(x_u^s, x_u^s) + f(B^* x_u^s) \right) \leq \\ &\leq \langle Ax_0 + \omega_0, y \rangle + \omega(x_0, y) + f(B^* y) = \\ &= \langle Ax_0 + BG(B^* x_0), y \rangle + \omega(x_0, y) + f(B^* y). \end{aligned}$$

Отсюда следует что x_0 точка абсолютного минимума Гато дифференцируемого функционала $\psi(x_0, y)$ в шаре S_R . Имеем

$$\text{grad}_y \psi(x_0, y) = 0 \quad \text{при } y = x_0$$

т.е.

$$Ax_0 + BT(B^* x_0) = 0.$$

Пусть X вещественное рефлексивное банахово пространство и X^* сопряженное пространство пространству X ; A - линейный ограниченный оператор из X в X^* и $A^{-1} : X^* \rightarrow X$ ограниченный обратный оператор оператору A . Пусть J дуальное деминепрерывное отображение, причем J имеет вид $J(x) = \|x\| \text{grad} \|x\|$, $x \neq 0$ и $J(0) = 0$. Пусть \dot{Y} далее $G : D_G \subset X^* \rightarrow X$ нелинейный оператор, и $D_{GA^*} = \{x \in X : A^* x \in D_G\}$ линейное многообразие, плотное в X , и $f(x)$ вещественный, ограниченный, слабо полунепрерывный снизу функционал на X^* , дифференцируемый по Гато, $\text{grad} f(x) = F(x)$ - ограниченный оператор в шаре $A^* S_R = \{A^* x : x \in X, \|x\| \leq R\}$. В доказательстве следующих теорем достаточно проверить выполнение условия теоремы 1.

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

- 1° сопряженное пространство X^* строго выпуклое,
- 2° дуальное отображение $J : X \rightarrow X^*$ непрерывно и секвенциально слабо непрерывно,
- 3° отображение $A^* - \alpha J$, ($\alpha > 0$) монотонно,
- 4° $\alpha \|x\|^2 + f(A^*x)$ строго выпуклый функционал на X ,
- 5° G радиально непрерывный и максимально монотонный оператор,
- 6° $\forall x \in D_{GA^*}$, $\|x\| = R$: $\langle AT(A^*x), x \rangle > 0$, где $T = F + G$.

Тогда $\exists z_0 \in A^*S_R$: $z_0 + AT(z_0) = 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть функционал

$$\psi(x, y) = \langle A^*x, y \rangle + \langle AG(A^*x), y \rangle + f(A^*y) + \omega(x, y)$$

где

$$\omega(x, y) = \alpha \|y\|^2 - 2\alpha \langle J(x), y \rangle, \quad x, y \in S_R.$$

Функционал ω удовлетворяет условию $\partial\omega(x, y)/\partial y = 0$ при $y = x$ т.е. выполнено условие а). Условие б) следует из деминепрерывности дуального отображения, а условие в) из условия 2° теоремы. В теореме 1.1 из [5] показано, что отображение $C(x) = Ax + A^*x - 2\alpha J(x)$ монотонно. Так как потенциал оператора C : $\langle A^*x, x \rangle - \alpha \|x\|^2$ слабо полунепрерывен снизу, то и функционал $\langle A^*x, x \rangle + \omega(x, x) + f(A^*x)$ слабо полунепрерывен снизу, т.е. выполнено условие 2° теоремы 1. Получаем $\exists x_0 \in S_R$: $A^*x_0 + AT(A^*x_0) = 0$. Поставляя $A^*x_0 = z_0 \in A^*S_R$ в последнее равенство, следует утверждение теоремы.

Теорема 3. Пусть выполнены условия:

- 1° пространство X строго выпуклое,
- 2° дуальное отображение $J : X^* \rightarrow X$ непрерывно и секвенциально слабо непрерывно,
- 3° отображение $A^* - \alpha AJA^*$, ($\alpha > 0$) монотонно,
- 4° $\alpha \|x\|^2 + f(x)$ строго выпуклый функционал на X^* ,
- 5° G радиально непрерывный и максимально монотонный оператор,
- 6° $\forall x \in D_{GA^*}$, $\|x\| = R$: $\langle AT(A^*x), x \rangle > 0$, где $T = F + G$.

Тогда $\exists z_0 \in A^*S_R$: $z_0 + AT(z_0) = 0$.

Доказательство. Здесь

$$\psi(x, y) = \langle A^*x, y \rangle + \langle AG(A^*x), y \rangle + f(A^*y) + \omega(x, y),$$

где

$$\omega(x, y) = \alpha \|A^*y\|^2 - 2\alpha \langle J(A^*x), A^*y \rangle, \quad x, y \in S_R.$$

Функционал ω удовлетворяет всем условиям а) – в). В ходе доказательства, получаем, что оператор $C = A + A^* - 2\alpha AJA^*$ монотонен. Следовательно, потенциал оператора C : $\langle A^*x, x \rangle + \omega(x, x) = \langle A^*x, x \rangle - \alpha \|A^*x\|^2$ слабо полунепрерывен снизу. Далее следует утверждение теоремы.

Замечание 2. Отображение $\Phi(x) = A^*x + AT(A^*x)$ из теоремы 3 необязательно монотонно, ибо имеет место оценка:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in D_{GA^*}: \langle \Phi(x) - \Phi(y), x - y \rangle &= \\ &= \langle A(x - y), x - y \rangle + \langle AF(A^*x) - AF(A^*y), x - y \rangle + \langle G(A^*x) - G(A^*y), A^*x - A^*y \rangle \geq \\ &\geq \langle A(x - y), x - y \rangle + \langle AF(A^*x) - AF(A^*y), x - y \rangle > \\ &> \alpha \langle J(A^*x) - J(A^*y), A^*x - A^*y \rangle - 2\alpha \langle J(A^*x) - J(A^*y), A^*x - A^*y \rangle = \\ &= -\alpha \langle J(A^*x) - J(A^*y), A^*x - A^*y \rangle. \end{aligned}$$

Пусть $X = H$ - вещественное гильбертово пространство, $G : D_G \subset H \rightarrow H$ радиально непрерывный максимально монотонный оператор, D_{GA^*} - линейное многообразие всюду плотно в H ; $A \in L(H, H)$; $f(x)$ - вещественный, ограниченный, слабо полунепрерывный снизу функционал на H , дифференцируемый по Гато, $grad f(x) = F(x)$ - ограниченное отображение (в смысле: ограниченное множество переводит в ограниченное множество). Положим $T(x) = F(x) + G(x)$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия:

- 1° $\langle A^*x, x \rangle \geq \alpha \|x\|^2, \alpha > 0,$
- 2° $\alpha \|x\|^2 + f(A^*x)$ строго выпуклый функционал на $H,$
- 3° $\forall x \in D_{GA^*}, \|x\| = R : \langle AT(A^*x), x \rangle > 0.$

Тогда $\exists z_0 \in A^*S_R : z_0 + AT(z_0) = 0.$

Теорема 5. Пусть выполнены условия:

- 1° $(A^*x, x) \geq \alpha \|A^*x\|^2$, $\alpha > 0$,
- 2° $\alpha \|x\|^2 + f(x)$ строго выпуклый функционал на H ,
- 3° $\forall x \in D_{GA^*}$, $\|x\| = R$: $(AT(A^*x), x) > 0$.

Тогда $\exists z_0 \in A^*S_R$: $z_0 + AT(z_0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] М.М. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, Наука, Москва, 1972.
- [2] И.М. Лаврентьев, О разрешимости нелинейных уравнений с немонотонными операторами, *Mathematica Montisnigri*, I (1993), 39.
- [3] Р. Шчепанович. Вариационный метод и нелинейные уравнения, *Мат. Весник* 41, (1989), 39.
- [4] Р. Шчепанович, Н. Михалевич, Вариационный метод и разрешимости нелинейных уравнений, *Mathematica Montisnigri*, VII (1996), 71.
- [5] Н. Михалевич. О разрешимости нелинейных уравнений, *Mathematica Montisnigri*, IX (1998), 81.
- [6] Р. Шчепанович. Вариационный метод и уравнения типа Гамерштейна, *Мат. Весник* 41, (1989), 125.
- [7] И.М. Лаврентьев, Р. Шчепанович. О разрешимости нелинейных уравнений в банаховом пространстве, *Mathematica Montisnigri*, III (1994), 59.