

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ δ -СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Л. БЕРБЕРЯН*

* Российско-Армянский(Славянский) университет
Ереван, Армения
e-mail: samvel357@mail.ru

Ключевые слова: Субгармонические, логарифмически субгармонические, нормальные функции, угловые и хордальные пределы

Аннотация. В статье рассматриваются δ -субгармонические функции и нормальные δ -субгармонические функции, определенные в единичном круге. Получены достаточные условия для существования хордальных и угловых пределов в произвольной точке единичной окружности.

ON BOUNDARY BEHAVIOR OF δ -SUBHARMONIC FUNCTIONS

S. BERBERYAN*

* Russian-Armenian (Slavonic) University, Yerevan, Armenia
Yerevan, Armenia
e-mail: samvel357@mail.ru

Summary. This paper considers the δ -subharmonic functions and normal δ -subharmonic functions, defined in the unit circle. New sufficient conditions for the existence of chordal and angular limits at arbitrary point of the unit circumference are obtained.

1 ВВЕДЕНИЕ

Статья посвящена исследованию хордальных и угловых пределов у δ -субгармонических функций, определенных в единичном круге. Поведение гармонических и субгармонических функций, определенных в единичном круге, рассматривалось во многих работах известных математиков. В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений¹. Обозначим через D , Γ и $h(\xi, \varphi)$ соответственно единичный круг $|z| < 1$, единичную окружность $|z| = 1$ и хорду единичного круга D , оканчивающуюся в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол φ ; $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ обозначает подобласть круга D , ограниченную хордами $h(\xi, \varphi_1)$ и $h(\xi, \varphi_2)$. Область $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и, если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Рассмотрим действительзначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D , для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f, \xi, S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S , т.е. $C(f, \xi, S) = \overline{\bigcap f(S \cap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ , а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации \bar{R} множества $R = (-\infty, +\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f, \xi, \Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α . В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi \in \Gamma$ угловой предел α . Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции². В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $T = \{S(z); S(z) = e^{i\alpha}(z+a) \cdot (1+\bar{a}z)^{-1}, a\text{-произвольная точка в } D, \alpha\text{-произвольное действительное число}\}$. Скажем, что действительзначная функция $f(z) \in \mathfrak{R}$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi: \{f(S(z)); S(z) \in T\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т.е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ , где $S_n(z) \in T$, можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K . Рассмотрим функции $f(z)$, определённые в D и представимые в виде разности двух субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$, т.е. $f(z) = u(z) - v(z)$. Такие функции

называют δ -субгармоническими функциями³. При этом $f(z) \neq \infty$. Введём характеристическую функцию $T(\rho) = T(\rho, f)$, изученную в работе³ И.И.Приваловым.

$$T(\rho) = T(\rho, f) = m^+(\rho, u) + N(\rho, v), \quad 0 < \rho < 1, \text{ где}$$

$$m^+(\rho, u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{и} \quad N(\rho, v) = \int_0^\rho \frac{n(r) - n(0)}{r} dr + n(0) \cdot \ln \rho.$$

$N(\rho, v)$ выражает среднюю плотность масс внутри круга радиуса ρ , $n(r)$ -масса распределения в круге $|z| < r$, $n(0)$ - масса распределения в точке $z = 0$ и точка $z = 0$ имеет изолированную массу. Скажем, что δ -субгармоническая функция $f(z)$ принадлежит классу N , если справедливо соотношение

$$T(\rho) = T(\rho, f) = 0(1) \quad \text{при} \quad \rho \rightarrow 1. \quad (1).$$

Пусть $f(x)$ -произвольная функция из класса $L(0, l)$, где $0 < l < +\infty$. Интегралом от $f(x)$ порядка α ($0 < \alpha < +\infty$) с началом в точке $x=0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x \in (0, l). \quad \text{Если} \quad f(x) \in L(0, l), \quad \text{то при любом} \quad \alpha$$

($0 < \alpha < +\infty$) функция $D^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и принадлежит классу $L(0, l)$ ^{4,5}. Поэтому

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} \{f(re^{i\theta})\} \equiv \frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} f(te^{i\theta}) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-x)^{\alpha-1} f(rx e^{i\theta}) dx. \quad \text{При} \quad \alpha = 0 \quad \text{принимают}$$

$D^0 f(x) = f(x)$. Введём также α -характеристики М.М. Джрбашяна для δ -субгармонических функций, рассмотренную в работе⁶ А.М.Джрбашяном.

$$T(r, r_0, +\infty) = \frac{m_\alpha}{2\pi}(r, +\infty) + N_\alpha(r, r_0, +\infty) \quad (\alpha > 0),$$

$$\text{где} \quad m_\alpha(r, +\infty) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_+^{-\alpha} D^{-\alpha} \{u(re^{i\theta})\} d\theta,$$

$$N_\alpha(r, r_0, +\infty) = \int_{r_0}^r \frac{n_+(t) - n_+(r_0)}{t} \left(1 - \frac{t}{r}\right)^\alpha dt + \int_0^{r_0} \left(\int_{\frac{t}{r}}^{\frac{t}{r_0}} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right) dn_+ t, \quad \text{где} \quad 0 < r_0 < r < 1.$$

Говорят⁶, что δ -субгармоническая функция $f(z)$ принадлежит классу N_α , если

$$\sup_{r_0 < r < 1} T_\alpha(r, r_0, +\infty) < +\infty \quad (2),$$

где $r_0 \in (0,1)$ - любое фиксированное число.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Пусть δ -субгармоническая в D функция $f(z)$ удовлетворяет условию (1). Тогда почти всюду на Γ , кроме, быть может, некоторого множества E , $mes E = 0$, функция $f(z)$ имеет равные хордальные пределы $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in h(\xi, \varphi)}} f(z) = f(\xi)$ для почти всех

$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$.

Доказательство. Известно³, что необходимым и достаточным условием для представимости δ -субгармонической функции в виде двух отрицательных субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$ будет соотношение (1). Поэтому справедливы следующие оценки:

$$\int_0^{2\pi} u^+(\rho e^{i\theta}) d\theta = o(1) \text{ и } \int_0^{2\pi} v^+(\rho e^{i\theta}) d\theta = o(1) \text{ при } \rho \rightarrow 1 \quad (3).$$

Отсюда, согласно известной теореме^{7,8} о хордальных пределах субгармонических функций у функций $u(z)$ и $v(z)$, а, значит, и у функции $f(z)$ существуют равные хордальные пределы для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим ту же задачу при $\alpha > 0$

Теорема 2. Пусть δ -субгармоническая в D функция $f(z)$, удовлетворяет условию (2). Тогда почти всюду на Γ , кроме, быть может, некоторого множества E , $mes E = 0$, функция $f_\alpha(z)$ имеет равные хордальные пределы $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E \\ z \in h(\xi, \varphi)}} f_\alpha(z) = f_\alpha(\xi)$

для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$.

Доказательство. В работе А.М. Джрбашяна⁶ установлено, что если δ -субгармоническая функция $f(z)$ удовлетворяет условию (2), то функция $f_\alpha(z) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} f(z)$ (где $\alpha > 0$) представима в виде разности двух неположительных субгармонических функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Принимая во внимание, что для функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ справедливы соотношения (3), получим утверждение теоремы 2.

Теперь рассмотрим угловые граничные пределы δ -субгармонических функций $f(z)$ из класса \mathfrak{R} .

Теорема 3. Пусть полунепрерывная сверху δ -субгармоническая функция $f(z)$ из класса \mathfrak{R} удовлетворяет условию (1). Тогда всюду на Γ , кроме, быть может, некоторого множества E , $mesE = 0$, функция $f(z)$ имеет конечные угловые пределы $\lim_{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E} f(z) = f(\xi)$.

Доказательство. Действительно, в силу утверждения теоремы 1 функция $f(z)$ имеет всюду на Γ , кроме, быть может, некоторого множества E , $mesE = 0$, равные хордальные пределы $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in h(\xi, \varphi)}} f(z) = f(\xi)$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$. Рассмотрим случай, когда $f(z)$ - полунепрерывная сверху функция класса \mathfrak{R} . Так как автором доказано, что любая полунепрерывная сверху функция класса \mathfrak{R} непрерывна⁹, то принимая во внимание утверждение следствия 1 из работы¹⁰ о существовании конечных угловых граничных значений $\lim_{z \rightarrow \xi \in \Gamma \setminus E} f(z) = f(\xi)$ у функций класса \mathfrak{R} в точках, где существуют равные хордальные пределы $\lim_{\substack{z \rightarrow \xi \\ z \in h(\xi, \varphi)}} f(z) = f(\xi)$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, получим утверждение теоремы 3.

Аналогичные рассуждения с учетом теоремы 2 относительно δ -субгармонических функций $f(z)$ классов N_α , где $\alpha > 0$, приводят к следующему результату.

Теорема 4. Пусть нормальная полунепрерывная сверху δ -субгармоническая функция $f(z)$ принадлежит классу N_α , где $\alpha > 0$. Тогда всюду на Γ кроме, быть может, некоторого множества E , $mesE = 0$, функция $f_\alpha(z)$ имеет конечные угловые пределы.

Замечание. Легко показать, что в рассмотренных теоремах, связанных с условиями (1) и (2), можно утверждать суммируемость функций $f_\alpha(e^{i\theta})$, где $f_\alpha(e^{i\theta})$ - могут быть, в зависимости от утверждения теорем, как хордальными, так и угловыми пределами данной функции $f_\alpha(z)$, где $\alpha \geq 0$.

Действительно, из вышеприведенных рассуждений следует, что при любом $\alpha \geq 0$ функция $f_\alpha(z) = f_1(z) - f_2(z)$, где $f_1(z)$ и $f_2(z)$ - неположительные субгармонические функции, которые удовлетворяют соотношениям (1) или (2). Из этих соотношений, в силу неположительности субгармонических функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$, имеем справедливость оценок:

$$\int_0^{2\pi} f_1(re^{i\theta}) d\theta = O(1) \text{ и } \int_0^{2\pi} f_2^+(re^{i\theta}) d\theta = O(1) \text{ при } r \rightarrow 1.$$

А это равносильно тому, что

$$\int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\theta})| d\theta < +\infty, \quad \int_0^{2\pi} |f_2(re^{i\theta})| d\theta < +\infty,$$

С другой стороны, согласно лемме Фату, имеют место неравенства:

$$\int_0^{2\pi} |f_1(e^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{n \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f_1(re^{i\theta})| d\theta < +\infty,$$

$$\int_0^{2\pi} |f_2(e^{i\theta})| d\theta \leq \lim_{n \rightarrow 1} \int_0^{2\pi} |f_2(re^{i\theta})| d\theta < +\infty,$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$|f_\alpha(e^{i\theta})| = |f_1(e^{i\theta}) + f_2(e^{i\theta})| \leq |f_1(e^{i\theta})| + |f_2(e^{i\theta})|, \quad \text{получим} \quad \text{наше}$$

утверждение.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье изучены некоторые граничные свойства различных классов δ - субгармонических функций, определенных в единичном круге. Ранее аналогичные результаты были известны для субгармонических функций.

REFERENCES

- [1] S.L. Berberyan, V.I. Gavrilov, "Predelnie mnojestva neprerivnich I garmonicheskikh funkci po nekasatelnim granichnim putyam", *Mathematica Montisnigri*, Vol.1, 17-25(1993).
- [2] D.C. Rung, "Asymptotic values of normal subharmonic functions", *Math. Zeitschr.*, vol.84, №1, 9-15(1964).
- [3] I.I. Privalov, "Subgarmonicheskie funktsii", M.L., NKTP SSSR, 199(1937).
- [4] M.M. Djrbashyan, "Integralnie preobrasovaniya I predstavleniya funktsii v kompleksnoi oblasti", M., "Nauka", 671(1966).
- [5] A.A. Kilbas, Samko, Marichev, "Drobnie integrali, proizvodnie I nekotorie ikh prilozheniya", isdatelstvo "Nauka I tekhnika", 688(1987).
- [6] A.M. Djrbashyan, "Rasshirenie teorii faktorizatsii M.M. Djrbashyana", *Isv.NAN Armenii, Matematika*, tom 30, №2, 47-75(1995).
- [7] E.D. Solomentsev, "Garmonicheskie I subgarmonicheskie funktsii I ikh obobsheniya", *sbornik Matematicheskiih analiz, Teoriya veroyatnosti, Regulirovanie, Itogi nauki, VINITI AN SSSR*, M., 83-100(1964).
- [8] M. Arsove, A. Huber, "On the existence of nontangential limits of subharmonic functions", *Journal London Math. Soc.*, vol. 42, №1, 125-132(1967).
- [9] S.L. Berberyan, "O nekotorykh svoistvakh polunepreverivnich sverkhu funktsi klassa \mathfrak{R} ", *Sbornik nauchnikh statei*, Isdatelstvo RAU, 9-13(2007).
- [10] S.L. Berberyan, "O predelnikh mnojestvakh neprerivnich funktsi klassa \mathfrak{R}^θ ", *Ekologicheskii vestnik nauchnich tsentrov CHES*, № 3, 5-9(2007).

Поступила в редакцию 15 января 2014 года