

**НЕДИАГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $\langle g | r^k | g' \rangle, \langle f | r^k | f' \rangle,$
 $\langle g | r^k | f' \rangle, \langle f | r^k | g' \rangle$ С РАДИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДИРАКА $g(r)$ И $f(r)$
ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ nlj - СОСТОЯНИЙ ЗН-АТОМА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ АППЕЛЯ $F_2(x, y)$ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ (1,1).
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ ЛАЙМАНА И БАЛЬМЕРА ($n \leq 3, n' \leq l \pm 1, k = 1$ И $Z = 1,$
 $2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$) И ГРАФИКИ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ $G(r) = rg, F(r)$
 $= rf$ И $P_{nl}(r)$ ДЛЯ $Z = 1, 118$ И $137, n < 3$**

ТАРАСОВ В. Ф.

ABSTRACT. This article deals with the connection between *a.m.* the off-diagonal matrix elements and *new* properties of Appell's function $F_2(x, y)$ to the vicinity of the singular point (1,1). Such approach allows to get the *exact* analytical expressions and numerical values of these elements for arbitrary nlj -states of ZH-like atoms and $Z \leq 118$. Relativistic dipole moments dmD of *T. Lyman's* (1906-1914) and *J. Balmer's* (1885) spectral series are compared with the values dmS on the basis of Schrödinger theory (as $n \leq 3, n' \leq l \pm 1, k = 1$ and $Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$) for the first time.

1. Введение

При исследовании эффектов тонкой (FS) и сверхтонкой структуры (HFS) спектра водорода возникает практическая необходимость вычислять *релятивистские* матричные элементы с радиальными функциями Дирака $g(r)$ и $f(r)$, обычно они вычисляются *приближённо* [1, 2], т.е. заменяя функции Дирака f и g через функции Бесселя

$$rg \cong C \cdot \left(\frac{x}{2} J_{2\gamma+1}(x) - (\gamma + 8) J_{2\gamma}(x) \right), \quad rf \cong C \cdot \alpha Z J_{2\gamma}(x),$$

где $x = \sqrt{8Zr/a_0}$, C – постоянная нормировки, $\alpha Z \ll 1$.

Например, при рассмотрении эффектов *первого* порядка HFS- взаимодействий часто встречаются интегралы $\langle f | r^k | f \rangle, \langle g | r^k | g \rangle, \langle f | r^k | g \rangle$ и $\langle r^k \rangle_{nlj}$, которые из-за этой аппроксимации содержат т.н. "*релятивистские поправочные множители*" типа F, R, T ; при рассмотрении эффектов *второго* порядка HFS- взаимодействий встречаются недиагональные матричные элементы, которые содержат "*множители*" G и S .

В этой статье релятивистские матричные элементы изучаются с помощью *нового* метода, т.е. с помощью гипергеометрических функций Аппеля $F_2(x, y)$ и их *новых* свойств в U - окрестности особой точки (1,1) [3]

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y = 2, x = 1 \mp \delta, 0 \leq \delta < 1\}, \quad \overset{\circ}{U} = U \setminus \{(1,1)\}.$$

В частности, для многих исследователей, которые решают различные задачи в квантовой механике и атомной физике вызывает большой интерес найти *точные* аналитические выражения и численные значения этих *недиагональных* матричных элементов. Подобные задачи рассматривались ранее [4, 5]. Радиальные функции Дирака могут быть представлены в виде [4, 6, 7]

2010 *Mathematics Subject Classification.* 33C65, 81Q05, 81Q35

Key words and phrases: Dirac's radial functions $g(r)$ and $f(r)$ of H-like atoms, Appell's function $F_2(x, y)$, the effects of fine and hyperfine structures of hydrogen spectrum, Lyman's and Balmer's spectral series.

$$\left. \begin{aligned} F_{nlj}(r) &= -rf(r) \\ G_{nlj}(r) &= -rg(r) \cdot s \end{aligned} \right\} = -A \sqrt{1 \mp \varepsilon} e^{-u/2} u^\gamma \left[(N - \kappa) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -n_r \\ 2\gamma + 1 \end{matrix} \middle| u \right) \pm n_r {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1 - n_r \\ 2\gamma + 1 \end{matrix} \middle| u \right) \right] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix},$$

где $u = 2\lambda_N r$, $\lambda_N = Z/N$, $\varepsilon = E_{rel}/mc^2 = \sqrt{1 - (\alpha\lambda_N)^2} < 1$, $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (\alpha Z)^2} < |\kappa|$, $N = \sqrt{n^2 - 2n_r} (|\kappa| - \gamma) < n$, $\kappa = l(l+1) - j(j+1) - 1/4$, $n_r = n - |\kappa|$, $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137,0359997650$, $s \equiv \text{sign}(\kappa)$,

$$n_r = n - |\kappa| = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{if } \kappa < 0, \quad j = l + 1/2, \quad l \geq 0, \\ 1, 2, 3, \dots, & \text{if } \kappa > 0, \quad j = l - 1/2, \quad l > 0, \end{cases}$$

A – нормировочная постоянная, $A^2 = 2\lambda_N (2\gamma + 1)_{n_r} / (4N(N - \kappa)\Gamma(n_r - 1)\Gamma(2\gamma + 1))$,

$E = E_{rel} - E_0 = -(1 - \varepsilon)/\alpha^2 < 0$ (в а.е. e^2/a_0); символ $(a)_k = \Gamma(a + k)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$.

Из условия $Z_c(n) = \sqrt{n^2 - 1/4} / \alpha$ имеем $Z_c(1) = \sqrt{3}/(2\alpha) \cong 118,67665702948836450$ и $\varepsilon = 1/2$.

Таким образом, при рассмотрении эффектов HFS- взаимодействий появляются интегралы [1, 2, 6]:

$$\langle g | r^k | g' \rangle = \int_0^\infty gg' r^{k+2} dr, \quad \langle f | r^k | f' \rangle = \int_0^\infty ff' r^{k+2} dr, \quad (1')$$

$$\langle g' | r^k | f \rangle = \int_0^\infty fg' r^{k+2} dr, \quad \langle g | r^k | f' \rangle = \int_0^\infty gf' r^{k+2} dr,$$

$$\langle gg' | r^k | ff' \rangle_\pm = \int_0^\infty (gg' \pm ff') r^{k+2} dr, \quad \langle fg' | r^k | f'g \rangle_\pm = \int_0^\infty (fg' \pm f'g) r^{k+2} dr, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1'')$$

где nlj - и $n'l'j'$ - разные состояния.

Если ввести “средне арифметический радиус” $\bar{u} = (\lambda_N + \lambda_{N'})r$ для (nlj) - и $(n'l'j')$ - состояний, тогда интегралы (1') могут быть представлены в “безразмерном” виде:

$$\begin{aligned} \langle g | \bar{u}^k | g' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle g | r^k | g' \rangle, & \langle f | \bar{u}^k | f' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle f | r^k | f' \rangle, \\ \langle g | \bar{u}^k | f' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle g | r^k | f' \rangle, & \langle g' | \bar{u}^k | f \rangle &= (\lambda_{N'} + \lambda_N)^k \langle g' | r^k | f \rangle, \dots \end{aligned}$$

Интегралы (1) здесь вычисляются с помощью функций Аппеля F_2 и их *новых* свойств [3,7-9]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{q-1} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x_1 t \right) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \beta' \\ \gamma' \end{matrix} \middle| x_2 t \right) dt = \frac{\Gamma(q)}{\lambda^q} F_2 \left(q \middle| \begin{matrix} \beta, \beta' \\ \gamma, \gamma' \end{matrix} \middle| x, y \right),$$

где $\text{Re } q > 0$, $\text{Re } \lambda > 0$, $x = x_1/\lambda$, $y = x_2/\lambda$, $x + y = 2$, $x \neq y$.

Знание этих свойств позволяет существенно упростить многие аналитические вычисления релятивистских интегралов и часто обнаружить их “скрытую” симметрию.

В таблицах 1-Z и 2-Z впервые даны *точные* численные значения этих интегралов для серий Лаймана (Т. Луман, 1906-1914) и Бальмера (J. Balmer, 1885), когда $n \leq 3$, $n' \leq 3$, $k = 1$, $Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$.

2. Основная теорема

Используя формулы (1'), получаем

Теорема 1. Аналитические выражения “усреднённых” матричных элементов $\langle F | \bar{u}^k | F' \rangle$, $\langle G | \bar{u}^k | G' \rangle$, $\langle F | \bar{u}^k | G' \rangle$ и $\langle G | \bar{u}^k | F' \rangle$ с помощью функций Аппеля $F_2(x, y)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \langle F | \bar{u}^k | F' \rangle \\ \langle G | \bar{u}^k | G' \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 \mp \varepsilon)(1 \mp \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (2)$$

$$\times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) + aa' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right. \\ \left. \pm (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \pm a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right] \cdot \left\{ \begin{matrix} 1 \\ s \cdot s' \end{matrix} \right\},$$

$$\langle F | \bar{u}^k | G' \rangle = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (3)$$

$$\times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) - aa' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right. \\ \left. - (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) + a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right] \cdot s',$$

$$\langle G | \bar{u}^k | F' \rangle = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (4)$$

$$\times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) - aa' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right. \\ \left. + (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{matrix} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) - a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{matrix} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{matrix} \right| x, y \right) \right] \cdot s,$$

где $q = \gamma + \gamma' + k + 1 > 0$, $s' \equiv \text{sign}(\kappa')$, $a \equiv n_r$, $a' \equiv n'_r$, $x = 2N' / (N + N')$, $y = 2N / (N + N')$, $x + y = 2$.

Очевидно, формулы (2)-(4) симметричны при перестановках: $n_r \leftrightarrow n'_r$, $\gamma \leftrightarrow \gamma'$, $a \leftrightarrow a'$, $N \leftrightarrow N'$, $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon'$, $x \leftrightarrow y$. Как видно, вычисление и свойства этих матричных элементов зависят *только* от свойств функции Аппеля $F_2(x, y)$ в U -окрестности. В частности, имеем [7]:

$$\langle G^2 | u^k | F^2 \rangle_+ = \langle u^k \rangle_{nlj}, \quad \langle G^2 | u^k | F^2 \rangle_- = \langle u^k \rangle_{nlj} - 2 \langle F | u^k | F \rangle_{nlj},$$

где $\langle u^k \rangle_{nlj} = (2\lambda_N)^k < r^k \rangle_{nlj}$.

3. Фундаментальные спектральные серии ЗН-атомов с функциями Дирака $g(r)$ и $f(r)$

Исходя из теоремы 1, сначала рассмотрим *дипольные* матричные элементы (в а.е. a_0) серии Лаймана (Лузан, 1906); для фундаментальной линии водорода L_α разрешены переходы [10-12]:

$$1s_{1/2} \leftrightarrow np_{1/2}, \quad 1s_{1/2} \leftrightarrow np_{3/2}, \quad n \geq 2.$$

Пример 1-2. Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 2p_{1/2}$ имеем (Таблица 1-1, $Z=1$):

$$\text{dmD} \equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (1,2902530706935518806 + 0,00001073562817113252) \\ + (0,00294229590771968585 + 0,00470777843155930458)$$

$$\cong 1,2902638063217230131 + 0,00765007433927899043 \cong 1,29791388066100200353$$

$$\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 1s | r | 2p \rangle = \sqrt{2^{15} / 3^9} \cong 1,2902662019598633603 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0,$$

где dmS – дипольный момент с радиальными функциями Шрёдингера $P_n(r)$.

Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 2p_{3/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (1,2902325076371208898 + 0,00000858847142179009) \\ &\quad + (0,00235382819850724187 + 0,00470770340262447653) \\ &\cong 1,2902410961085426798 + 0,0070615316011317184 \cong 1,2973026277096743982 \rightarrow \text{dmS} \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пример 1-3. Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{1/2}$ имеем (Таблица 1-1, $Z=1$):

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (0,51667753204551479691 + 0,00000382132868295074) \\ &\quad + (0,00104730525002075670 + 0,00188521414649892843) \\ &\cong 0,51668135337419774765 + 0,00293251939651968513 \cong 0,51961387277071743278 \\ &\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 1s | r | 3p \rangle = \sqrt{3^7 / 2^{13}} \cong 0,51668924261832663008 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{3/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (0,51667735012829229128 + 0,00000534998308470164) \\ &\quad + (0,00146626104085967163 + 0,00188521348273303948) \\ &\cong 0,51668270011137699292 + 0,00335147452359271111 \cong 0,52003417463496970403 \rightarrow \text{dmS} \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Аналогично построены все Таблицы 1-Z серии Лаймана.

Исходя из теоремы 1, рассмотрим теперь *дипольные* матричные элементы серии Бальмера (Balmer, 1885); для фундаментальной линии водорода H_α разрешены переходы [10-12]:

$$\begin{aligned} 2s_{1/2} &\leftrightarrow np_{1/2}, \quad 2s_{1/2} \leftrightarrow np_{3/2}, \quad 2p_{1/2} \leftrightarrow ns_{1/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow ns_{1/2}, \\ 2p_{1/2} &\leftrightarrow nd_{3/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow nd_{3/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow nd_{5/2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Пример 2-3. Для перехода $2s \leftrightarrow 3p_{1/2}$ имеем (Таблица 2-1, $Z=1$):

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (3,0647890428180054417 + 0,0000073668963246701) \\ &\quad + (0,0048146528436505733 + 0,0055912415029017388) \\ &\cong 3,0647964097143301122 + 0,0104058943465523121 \cong 3,0752023040608824243 \\ &\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 2s | r | 3p \rangle = \sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} \cong 3,06481540657051644 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогично построены все Таблицы 2-Z серии Бальмера.

Однако, есть *один* случай

$$GF'(2s_{1/2}, 2p_{1/2}) = \alpha Z \frac{c\sqrt{c}}{4(c+1)} \left[{}_3F_2 \left(\begin{matrix} -1, -1, 2 \\ c, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) - 1 + 2 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c+1, -1 \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) \right] = 0,$$

где $c = 2\gamma + 1$, $\gamma = 0,99997337396853164013$.

4. Графики радиальных функций Дирака $G(r)$ и $F(r)$ для nlj – состояний и функция $P_{nl}(r)$ атома водорода, $Z=1$, 118 и 137, $n < 3$

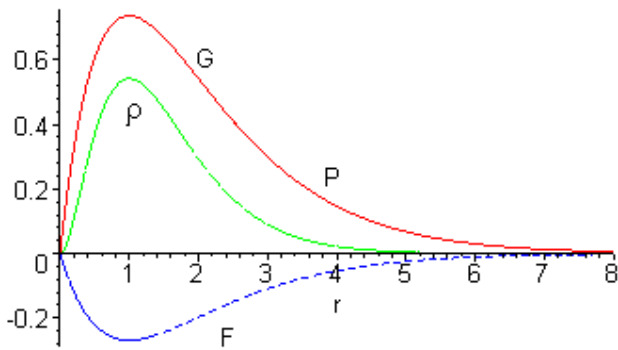


Рис.1. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $m=100$ и $P_{10}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=-1$, $N=n=1$, $n_r=0$, $\gamma = \varepsilon = 0.99997337396853164013$, $E = -0.50000665659648640754$, $E_n = -1/2$.

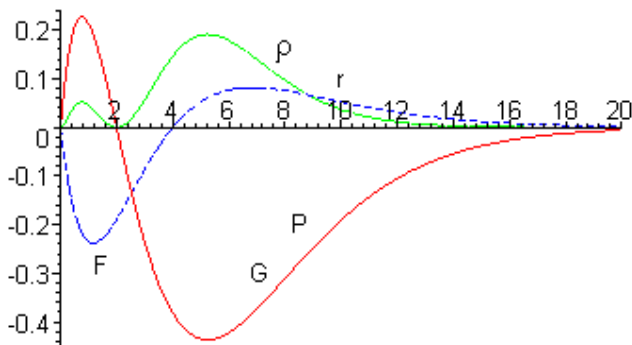


Рис.2. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r) > 0$ для $2s$ - состояния, $m=200$ и $P_{20}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=-1$, $n=2$, $n_r=1$, $N=1.9999866869399564281$, $\gamma = 0.99997337396853164013$, $\varepsilon = 0.99999334346997821406$, $E = -0.12500208018917151638$, $E_n = -1/8$.

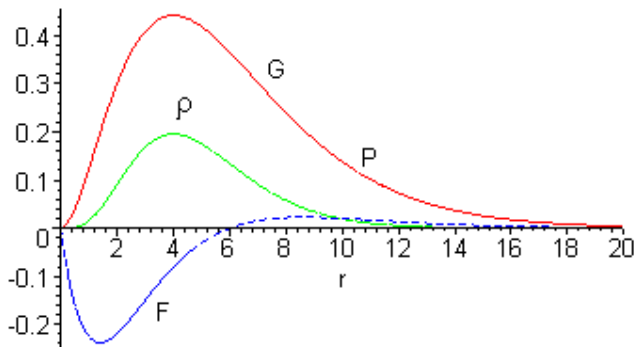


Рис.3. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $2p^{1/2}$ - состояния, $m=200$ и $P_{21}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=1$, $n=2$, $n_r=1$, $N=1.9999866869399564281$, $\gamma = 0.99997337396853164013$, $\varepsilon = 0.99999334346997821406$, $E = -0.12500208018917151638$, $E_n = -1/8$.

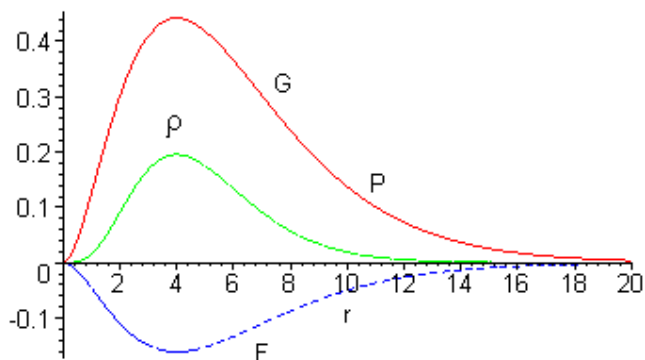


Рис.4. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $2p_{3/2}$ -состояния, $m = 200$ and $P_{21}(r)$, где $Z=1$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$, $n_r = 0$, $\gamma = 1.9999866871171939958$, $\varepsilon = 0.99999334355859699792$, $E = -0.12500041602897242177$, $E_n = -1/8$.

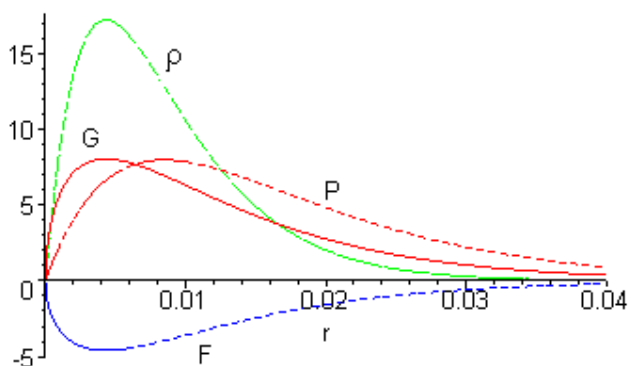


Рис.5. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $M = 1/5$ and $P_{10}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -1$, $N = n = 1$, $n_r = 0$, $\gamma = \varepsilon = 0.50845663239550418996$, $E = -9230.6266557282426940$, $E_n = -6962$.

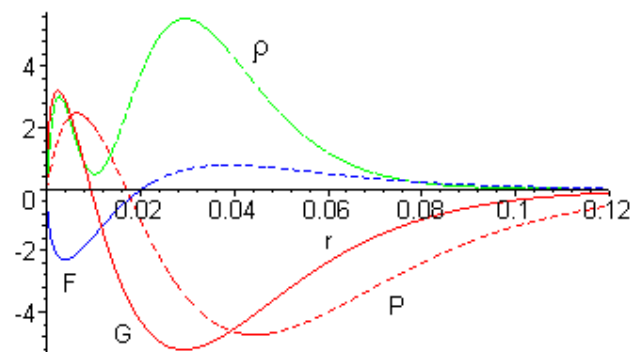


Рис.6. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r) > 0$ для $2s$ -состояния, $M = 1/5$ и $P_{20}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -1$, $n = 2$, $n_r = 1$, $N = 1.7369263843902562988$, $\gamma = 0.50845663239550418996$, $\varepsilon = 0.86846319219512814940$, $E = -2470.1119867616492849$, $E_n = -1740,5$.

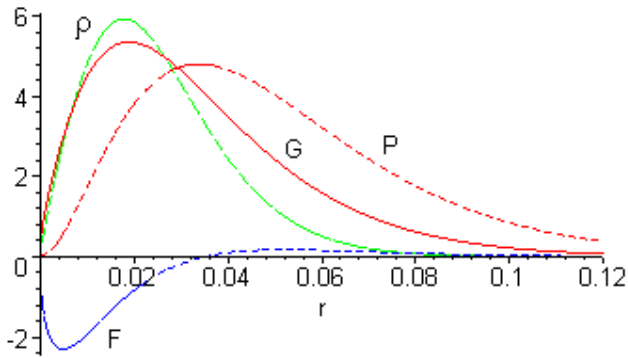


Рис.7. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{1}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{5}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = 1$, $n = 2$, $n_r = 1$, $N = 1.7369263843902562988$, $\gamma = 0.50845663239550418996$, $\varepsilon = 0.86846319219512814940$, $E = -2470.1119867616492849$, $E_n = -1740,5$.

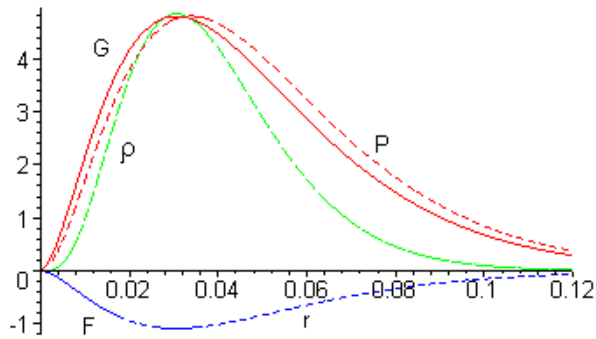


Рис.8. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{3}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{5}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$, $n_r = 0$, $\gamma = 1.8051393705271005697$, $\varepsilon = 0.90256968526355028485$, $E = -1829.6307499074864606$, $E_n = -1740,5$.

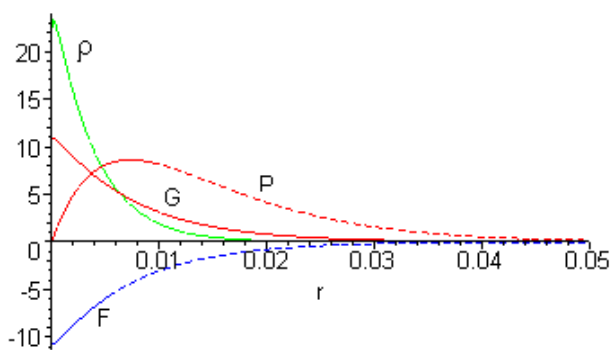


Рис.9. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{10}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -1$, $N = n = 1$, $n_r = 0$, $\gamma = \varepsilon = 0.022920229923976769741$, $E = -18348.449322773593389$, $E_n = -9384,5$.

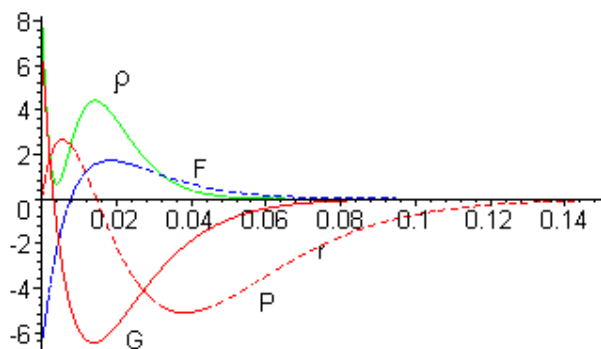


Рис.10. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r) > 0$ для $2s$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{20}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -1$, $n = 2$, $n_r = 1$,
 $N = 1.4303287943154726057$, $\gamma = 0.022920229923976769741$, $\varepsilon = 0.71516439715773630285$,
 $E = -5348.8893989344408348$, $E_n = -2346,125$.

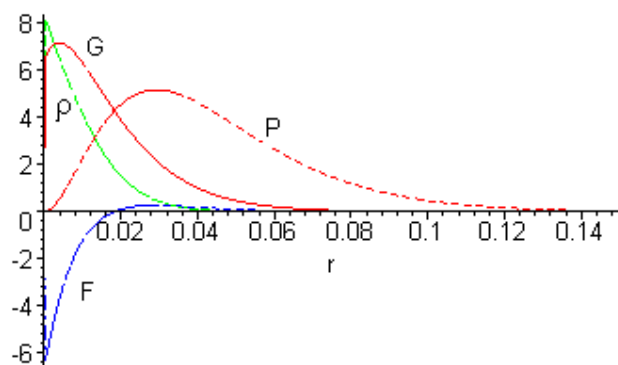


Рис.11. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{1}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = 1$, $n = 2$, $n_r = 1$,
 $N = 1.4303287943154726057$, $\gamma = 0.022920229923976769741$, $\varepsilon = 0.71516439715773630285$,
 $E = -5348.8893989344408348$, $E_n = -2346,125$.

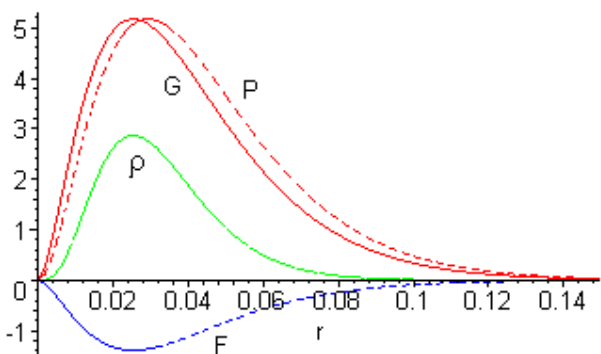


Рис.12. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{3}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$,
 $n_r = 0$, $\gamma = 1.732202452642231446$, $\varepsilon = 0.86610122632111657231$, $E = -2514.4670255913346512$,
 $E_n = -2346,125$.

Таблица 1. Точные численные значения дипольных моментов спектральных серий 3N-атома для Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118

Таблица 1-1. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, Z = 1.

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} \cong$	1,29026620195986336	$\sqrt{3^7/2^{13}} \cong$	0,51668924261832663
dmD	1,2979138806610020035	1,2973026277096743982	,51961387277071743278	,52003417463496970403
GG'	1.2902530706935518806	1.2902325076371208898	,51667753204551479691	,51667735012829229128
FF'	.00001073562817113252	.00000858847142179009	.00000382132868295074	.00000534998308470164
GF'	,00294229590771968585	,00235382819850724187	,00104730525002075670	,00146626104085967163
FG'	,00470777843155930458	,00470770340262447653	,00188521414649892843	,00188521348273303948
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	.99997337396853164013	.99997337396853164013	.99997337396853164013	.99997337396853164013
γ'	.99997337396853164013	1.9999866871171939958	.99997337396853164013	1.9999866871171939958
N	1	1	1	1
N'	1.9999866869399564281	2	2.9999822492598396307	2.9999955623691159040
ε	.99997337396853164013	.99997337396853164013	.99997337396853164013	.99997337396853164013
ε'	.99999334346997821406	.99999334355859699792	.99999704155205912292	.99999704157831656948
-E	.50000665659648640754	.50000665659648640754	.50000665659648640754	.50000665659648640754
-E _n	1/2	1/2	1/2	1/2
-E'	.12500208018917151638	.12500041602897242177	.05555629517641473772	.0555580209136446172
E _{n'}	1/8 = 0,125	1/8	1/18 \cong 0,0555 ..	1/18

где $E_n = -\frac{1}{2} Z^2 / n^2$, $E_{n'} = -\frac{1}{2} Z^2 / n'^2$, $E = (\varepsilon - 1)/\alpha^2 < 0$, $E' = (\varepsilon' - 1)/\alpha^2 < 0$.

Таблица 1-2. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, Z = 2

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,64513310097993168	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,25834462130916331
dmD	,65277825575366037139	,65214407685412150068	,26126116929993876530	,26168286395906451134
GG'	.64510683542288506480	.64506571052479034200	.25832119806548582244	.25832083562105392483
FF'	.00002147087943663357	.00001717645462577115	.00000764196125310251	.00001069972925638652
GF'	,00294212674051207761	,00235366728274066071	,00104716803142905241	,00146617001200906394
FG'	,00470782271082659541	,00470752259196472682	,00188516124177078794	,00188515859674513605
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	.99989349162000015892	.99989349162000015892	.99989349162000015892	.99989349162000015892
γ'	.99989349162000015892	1.9999467479370632802	.99989349162000015892	1.9999467479370632802
N	1	1	1	1
N'	1.9999467451009790120	2	2.9999289935730146604	2.9999822492598396307
ε	.99989349162000015892	.99989349162000015892	.99989349162000015892	.99989349162000015892
ε'	.99997337255048950601	.99997337396853164013	.99998816573555888818	.99998816615572138488
-E	2.0001065140523194386	2.0001065140523194386	2.0001065140523194386	2.0001065140523194386
-E _n	2	2	2	2
-E'	.50003328581861576767	.50000665659648640754	.22223405705467306979	.2222616687977217081
E _{n'}	1/2	1/2	2/9 \cong 0,2222 ..	2/9

Таблица 1-10. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 10$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,12902662019598633	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,05166892426183266
dmD	,13664803711783544914	,13582541937683176684	,054515797971436414441	,05494999435778000918
GG'	,12889480730398554980	,12868937766849415565	,05155147166761353131	,05154988224814365063
FF'	,00010729385205214863	,00008580395574725098	,00003809812877613376	,00005346061266175089
GF'	,00293670402596558827	,00234851128435815221	,001042771100288657590	,00146325249239857794
FG'	,00470923193583216242	,00470172646823220799	,001883457074758091769	,00188339900457602971
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	,99733387819770927543	,99733387819770927543	,99733387819770927543	,99733387819770927543
γ'	,99733387819770927543	1,9986682727758709286	,99733387819770927543	1,9986682727758709286
N	1	1	1	1
N'	1,9986664945396514429	2	2,9982220586192139317	2,9995560580778852744
ε	,99733387819770927543	,99733387819770927543	,99733387819770927543	,99733387819770927543
ε'	,99933324726982572143	,99933413638793546428	,99970376429625973254	,99970402776783467138
-E	50,066742016229567448	50,066742016229567448	50,066742016229567448	50,066742016229567448
-E _n	50	50	50	50
-E'	12,520859662739522155	12,504163033581692388	5,5629703573246167468	5,5580226601264846935
-E _{n'}	12,5	12,5	50/9 \cong 5,555 ..	50/9

Таблица 1-18. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 18$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,07168145566443685	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,02870495792324036
dmD	,07927145102547627702	,07825186021029502674	,0314720863891016866	,03192194761639177423
GG'	,07144213857101051499	,07107319036166175955	,02849212106570895736	,02849020135578251806
FF'	,00019287135136094301	,00015411541178205432	,00006810348718393965	,00009606761384368240
GF'	,00292397988484649528	,00233642975390494049	,00103246659085764913	,00145641002918285682
FG'	,00471246121825832373	,00468812468294627238	,00187939524535114046	,00187926861758271694
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	,99133574600478397691	,99133574600478397691	,99133574600478397691	,99133574600478397691
γ'	,99133574600478397691	1,9956819790003770966	,99133574600478397691	1,9956819790003770966
N	1	1	1	1
N'	1,9956631709809067762	2	2,9942182592488370415	2,9985603142176003583
ε	,99133574600478397691	,99133574600478397691	,99133574600478397691	,99133574600478397691
ε'	,99783158549045338809	,99784098950018854828	,99903730690468229125	,99904009427338322805
-E	162,70485810845361258	162,70485810845361258	162,70485810845361258	162,70485810845361258
-E _n	162	162	162	162
-E'	40,720363841006831367	40,543767209553668827	18,078283896356443819	18,025940275170790974
-E _{n'}	81/2	81/2	18	18

Таблица 1-36. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, $Z = 36$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,03584072783221842	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,01435247896162018
dmD	,043320154848999104472	,041829415841771349557	,016893443382557937353	,01739639819115669894
GG'	.035343713522939695603	.034613205156840974567	.013914146650613955566	.01391865821471140956
FF'	.000383396177888463299	.000305258507486654879	.000131963196278323845	.00019067482882135753
GF'	,002867577485040533196	,002283153754966394079	,000987006945624256172	,00142613535978219646
FG'	,004725467663130412371	,004627798422477326034	,001860326590041401769	,00186092978784173539
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	.96487628493369360172	.96487628493369360172	.96487628493369360172	.96487628493369360172
γ'	.96487628493369360172	1.9826714920095679538	.96487628493369360172	1.9826714920095679538
N	1	1	1	1
N'	1.9823603531818797963	2	2.9764920862879468450	2.9942182592488370415
ε	.96487628493369360172	.96487628493369360172	.96487628493369360172	.96487628493369360172
ε'	.99118017659093989815	.99133574600478397691	.99609748622959062463	.99614364543947245902
$-E$	659.58351166304325712	659.58351166304325712	659.58351166304325712	659.58351166304325712
$-E_n$	648	648	648	648
$-E'$	165.62627516518949838	162.70485810845361258	73.284780158953838855	72.417962577386051303
$E_{n'}$	162	162	72	72

Таблица 1-54. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, $Z = 54$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,02389381855481228	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,00956831930774678
dmD	,0311796545015827399	,02918619070591303962	,0117950980263817936	,01239017439496395742
GG'	.02309904671272689940	.02202309388368650684	.00887732040650169055	.00890601427584566362
FF'	.00056857002976916316	.00044990378698013622	.00018653026678742104	.00028201302377134950
GF'	,00276897675967632236	,00219106365972920202	,00090841575649052212	,00137342362042183225
FG'	,00474306099941035496	,00452212937551719453	,00182283159660215989	,00182872347492511205
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	.91908598714252745136	.91908598714252745136	.91908598714252745136	.91908598714252745136
γ'	.91908598714252745136	1.9607955150299977508	.91908598714252745136	1.9607955150299977508
N	1	1	1	1
N'	1.9591253084693319082	2	2.9455634348236518339	2.9869032508703718476
ε	.91908598714252745136	.91908598714252745136	.91908598714252745136	.91908598714252745136
ε'				
$-E$	1519.4733427978666894	1519.4733427978666894	1519.4733427978666894	1519.4733427978666894
$-E_n$	1458	1458	1458	1458
$-E'$	383.79016181867758161	368.10786986284435643	168.80180402910228878	164.14112265121203972
$-E_{n'}$	729/2 = 364,5	729/2	162	162

Таблица 1-86. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 86$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,01500309537162631	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,00600801444905030
dmD	,02155863405066773748	,01612242665543373278	,00731326969728336613	,008253507015775855388
GG'	,01347581012175293281	,02196412903670509770	,00473583558965814469	,004890998111840057487
FF'	,00086797030101345360	,00067399629661650399	,00023640225161570094	,000426887237939010605
GF'	,00245985317786788203	,00191012518535192702	,00066997088404179292	,001209810897457471430
FG'	,00475500045003346903	,00167106097196772757	,00167106097196772757	,001725810768539315865
8/8'	-1 / 1	-1 / -2	-1 / 1	-1 / -2
γ	,77855827391488270790	,77855827391488270790	,77855827391488270790	,77855827391488270790
γ'	,77855827391488270790	1,8989873580098740436	,77855827391488270790	1,8989873580098740436
N	1	1	1	1
N'	1,8860319583267313808	2	2,8485492966876193473	2,9661380136500304269
ε	,77855827391488270790	,77855827391488270790	,77855827391488270790	,77855827391488270790
ε'	,94301597916336569039	,94949367900493702180	,97542923941877209170	,97736091330506801737
-E	4158,4243308037675343	4158,4243308037675343	4158,4243308037675343	4158,4243308037675343
-E _n	3698	3698	3698	3698
-E'	1070,0952476454476540	948,45139530986777562	461,41100159261854650	425,13635801047970331
E _n '	1849/2 = 924,5	1849/2	3698/9 \cong 410,888..	3698/9

Таблица 1-101. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 101$

States	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,01277491289069171	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,00511573507542897
dmD	,018660368317436529999	,01533235678291326655	,00571135579813434767	,0069575133128569673
GG'	,010730887813211611820	,00894137875164227124	,00346557717977487915	,00374287246660792746
FF'	,000980544378520318782	,00075099805274516061	,00022042868878502238	,00047912255042521743
GF'	,002229551761246537352	,00170761167762484523	,00050120849405259994	,00108942394607929585
FG'	,004719384364458062045	,00393236830090098947	,00152414143552184620	,00164609434974452656
8/8'	-1 / 1	-1/-2	-1/1	-1/-2
γ	,67585718753009893155	,67585718753009893155	,67585718753009893155	,67585718753009893155
γ'	,67585718753009893155	1,8592425710315734148	,67585718753009893155	1,8592425710315734148
N	1	1	1	1
N'	1,8307687934472222326	2	2,7755051342269925130	2,9527081030916596226
ε	,67585718753009893155	,67585718753009893155	,67585718753009893155	,67585718753009893155
ε'	,91538439672361111629	,92962128551578670739	,96409736538835602379	,96834582735685173880
-E	6087,0341911618210455	6087,0341911618210455	6087,0341911618210455	6087,0341911618210455
-E _n	10201/2 = 5100,5	5100,5	5100,5	5100,5
-E'	1588,9850104172527182	1321,6323944718093109	674,21073683119138912	594,42944208326171109
-E _n '	10201/8 = 1275,125	10201/8	10201/18 \cong 566,7222...	10201/18

Таблица 1-118. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z=118$

Состояния	$1s - 2p \frac{1}{2}$	$1s - 2p \frac{3}{2}$	$1s - 3p \frac{1}{2}$	$1s - 3p \frac{3}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$	0,01093445933864290	$\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$	0,00437872239507056
dmD	,01548310958005248412	,01179987443062507152	,00373829249177033323	,00554881667081505707
GG'	.00800519762156500802	.00612562072632990891	.00213586799699072541	.00263797213454478140
FF'	.00105684267158972378	.00079130038279544177	.00013924876702683046	.00051056840799165331
GF'	,00185138113636921714	,00138620311356802187	,00024393653612448676	,00089441573925089080
FG'	,00456968815052853518	,00349675020793169896	,00121923919162829060	,00150586038902773155
8/8'	-1 / 1	-1/-2	-1/1	-1/-2
γ	.50845663239550418996	.50845663239550418996	.50845663239550418996	.50845663239550418996
γ'	.50845663239550418996	1.8051393705271005697	.50845663239550418996	1.8051393705271005697
N	1	1	1	1
N'	1.7369263843902562988	2	2.6521362200275491807	2.9343276471883982744
ε	.50845663239550418996	.50845663239550418996	.50845663239550418996	.50845663239550418996
ε'	.86846319219512814940	.90256968526355028485	.94582495931127077902	.95597346574944253946
-E	9230.6266557282426940	9230.6266557282426940	9230.6266557282426940	9230.6266557282426940
-E _n	6962	6962	6962	6962
-E'	2470.1119867616492849	1829.6307499074864606	1017.3457880097175975	826.76835330533539747
-E _{n'}	1740,5	1740,5	6962/9 \cong 773,5555 ..	6962/9

Таблица 2-1. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=1$

$nlj - n'l'j'$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} \cong$	3,064815406570516442	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} \cong$	0,9384042377397919	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}}$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} \cong$	4,7479916115390094
dmD	3,075202304060882424	3,067788877331386055	,93281574716243788	,93752844503783334	4,7524048015053487	4,7628980624679973	4,7624019315609641
GG'	3.064789042818005441	3.064681674432524634	.93839859459986130	.93848426373630621	4.7478594081831539	4.7479689080247616	4.7479549007130696
FF'	.0000073668963246701	.0000022652183195089	.00000225558892948	-.0000048583721109	.00000175571186594	.00001141275459902	.00001053484344343
GF'	,0048146528436505733	-,002485053444360266	-,0031598393257010	-,0026630786544634	,00625575593843026	,00625581212540508	,00577459199537740
FG'	,0055912415029017388	,0055911231619088719	-,0024252637006519	,00171211832810146	-,0017121183281014	,00866192956323152	,00866190400907361
κ/κ'	-1 / 1	-1 / -2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	.9999733739685316401	.9999733739685316401	.99997337396853164	1.9999866871171939	.99997337396853164	1.9999866871171939	1.9999866871171939
γ'	.9999733739685316401	1.999986687117193995	.99997337396853164	.99997337396853164	1.9999866871171939	1.9999866871171939	2.9999911247612064
N	1.999986686939956428	1.999986686939956428	1.9999866869399564	2	1.9999866869399564	2	2
N'	2.999982249259839630	2.999995562369115904	2.9999822492598396	2.9999822492598396	2.9999955623691159	2.9999955623691159	3
ε	.9999933434699782140	.9999933434699782140	.99999334346997821	.99999334355859699	.99999334346997821	.99999334355859699	.99999334355859699
ε'	.9999970415520591229	.9999970415783165694	.99999704155205912	.99999704155205912	.99999704157831656	.99999704157831656	.99999704158706883
-E	.1250020801891715163	.1250020801891715163	.12500208018917151	.12500041602897242	.12500208018917151	.12500041602897242	.12500041602897242
$-E_n$	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8
$-E'$.05555629517641473	.055558020913644617	.05555629517641473	.05555629517641473	.0555580209136446	.0555580209136446	.0555563773381420
$-E_{n'}$	1/18 \cong 0,0555 ..	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/18

Таблица 2-2. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=2$

$nlj - n'l'j'$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	1,53240770328525822	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,46920211886989598	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	2,37399580576950472
dmD	1,539008061062850795	1,53919938164826192	,464107210854346582	,468401899650660108	2,37854670171058609	2,38889082219236527	2,38837972644079167
GG'	1.532354972214862711	1.53214023265876509	.469190831003345915	.469362180225481619	2.37373139157786203	2.37395039787989273	2.37392238369093994
FF'	0.000014733662015508	.000002265218319508	.000004510818678697	-.00000971705401185	.000003510820639659	.000022825354147712	.000021069502028994
GF'	,0010471680314290524	,001466170012009063	-,00266293437066068	-,00266313696771292	,006255482398646363	,006255707167807241	,005774483673372319
FG'	,0055911871545435233	,005590713759168271	-,00242519659701735	,001712573446903261	-,00144368308656196	,008661891790517589	,008661789574450428
$8/8'$	-1/1	-1/-2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	.9998934916200001589	.999893491620000158	.999893491620000158	1.99994674793706328	.999893491620000158	1.99994674793706328	1.99994674793706328
γ'	.9998934916200001589	1.99994674793706328	.999893491620000158	.999893491620000158	1.99994674793706328	1.99994674793706328	2.99996449888728438
N	1.999946745100979012	1.99994674510097901	1.99994674510097901	2	1.99994674510097901	2	2
N'	2.999928993573014660	2.99998224925983963	2.99992899357301466	2.99992899357301466	2.99998224925983963	2.99998224925983963	3
ε	.9999733725504895060	.999973372550489506	.999973372550489506	.999973373968531640	.999973372550489506	.999973373968531640	.999973373968531640
ε'	.9999881657355588881	.999988166155721384	.999988165735558888	.999988165735558888	.999988166155721384	.999988166155721384	.999988166295761462
-E	.5000332858186157676	.500033285818615767	.500033285818615767	.500006656596486407	.500033285818615767	.500006656596486407	.500006656596486407
$-E_n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$-E'$.2222340570546730697	.500006656596486407	.222234057054673069	.222234057054673069	.222226166879772170	.222226166879772170	.22223537086028649

$-E_{n'}$	2/9	2/9	2/9	2/9	2/9	2/9	2/9
Таблица 2-10. Дипольные моменты $\langle G r G' \rangle$, $\langle F r F' \rangle$, $\langle G r F' \rangle$, $\langle F r G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 10$							
$nlj - n'l'j'$	2s - 3p 1/2	2s - 3p 3/2	2p 1/2 - 3s p30	2p 3/2 - 3s	2p 1/2 - 3d 3/2	2p 3/2 - 3d 3/2	2p 3/2 - 3d 5/2
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,306481540657051644	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,0938404237739791	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,4747991611539009
dmD	,3166908000739805143	,3082419740694586702	,08872324858612972	,09365577883027818	,47829575303599589	,48959911410176725	,488966442656745849
GG'	,3062173133873350292	,3051431694829934258	,09378372993474895	,09464223220517242	,47347589048633990	,47457198385626169	,474431982447947187
FF'	,0000736473920203653	,0000111426288658104	,00002249653466497	-,0000486345870631	,00001745746677815	,00011410194264051	,000105317912146276
GF'	,0048103946878576438	-,002489922573360591	-,0026599329663682	-,0026649881497287	,00624671092571554	,00625234721543503	,005771016158925369
FG'	,0055894446067674768	,0055775845309600249	-,0024230449169160	,00172716936189759	-,0014443058428377	,00866068108743001	,008658126137727017
κ/κ'	-1 / 1	-1 / -2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,9973338781977092754	,9973338781977092754	,99733387819770927	1,9986682727758709	,99733387819770927	1,9986682727758709	1,99866827277587092
γ'	,9973338781977092754	1,998668272775870928	,99733387819770927	,99733387819770927	1,9986682727758709	1,9986682727758709	2,99911234611190969
N	1,998666494539651442	1,998666494539651442	1,9986664945396514	2	1,9986664945396514	2	2
N'	2,998222058619213931	2,999556058077885274	2,9982220586192139	2,9982220586192139	2,9995560580778852	2,9995560580778852	3
ε	,9993332472698257214	,9993332472698257214	,99933324726982572	,99933413638793546	,99933324726982572	,99933413638793546	,999334136387935464
ε'	,9997037642962597325	,9997040277678346713	,99970376429625973	,99970376429625973	,99970402776783467	2,9995560580778852	,999704115370636564
$-E$	12,52085966273952215	12,52085966273952215	12,520859662739522	12,504163033581692	12,520859662739522	12,504163033581692	12,5041630335816923
$-E_n$	25/2	25/2	25/2	25/2	25/2	25/2	25/2
$-E'$	5,562970357324616746	5,558022660126484693	5,5629703573246167	5,5629703573246167	5,5580226601264846	5,5580226601264846	5,55637757891582591
$-E_{n'}$	50/9 \cong 5,555 ..	50/9	50/9	50/9	50/9	50/9	50/9

Таблица 2-18. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 18$

$nlj - n'l'j'$	2s - 3p 1/2	2s - 3p 3/2	2p 1/2 - 3s	2p 3/2 - 3s	2p 1/2 - 3d 3/2	2p 3/2 - 3d 3/2	2p 3/2 - 3d 5/2
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,17026752258725091	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,0521335687633217	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,2637773117521671
dmD	,1803080278859917692	,170919218077867094	,046999811704987550	,05258771140385718	,26620172856067269	,27847543023630822	,27771803292965420
GG'	,1697894914412438324	,167854151868351373	,052030442195205542	,05358318084440806	,26139034572666672	,26336781268280613	,26311610257436396
FF'	,0001324772232707070	,000019281074999132	,000040250785168528	-,0000877459496613	,00003101563195003	,00020527894598720	,00018944764802616
GF'	,004800706421587727	-,00250094888434647	-,00265289015732884	-,0026691941297716	,00622610560696133	,00624449743503113	,00576291614555451
FG'	,0055853527998895027	,005546734018863059	-,00241799111805768	,00176147063888208	-,0014457384049054	,00865784117248376	,00864956656170956
8/8'	-1/1	-1/-2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,9913357460047839769	,991335746004783976	,991335746004783976	1,9956819790003770	,99133574600478397	1,9956819790003770	1,9956819790003770
γ'	,9913357460047839769	1,99568197900037709	,991335746004783976	,99133574600478397	1,9956819790003770	1,9956819790003770	2,9971230474084412
N	1,995663170980906776	1,99566317098090677	1,99566317098090677	2	1,9956631709809067	2	2
N'	2,994218259248837041	2,99856031421760035	2,99421825924883704	2,9942182592488370	2,9985603142176003	2,9985603142176003	3
ε	,9978315854904533880	,997831585490453388	,997831585490453388	,99784098950018854	,99783158549045338	,99784098950018854	,99784098950018854
ε'	,9990373069046822912	,999040094273383228	,999037306904682291	,99903730690468229	,99904009427338322	,99904009427338322	,99904101580281374
$-E$	40,72036384100683136	40,7203638410068313	40,7203638410068313	40,543767209553668	40,720363841006831	40,543767209553668	40,543767209553668
$-E_n$	81/2	81/2	81/2	81/2	81/2	81/2	81/2
$-E'$	18,07828389635644381	18,0259402751707909	18,0782838963564438	18,078283896356443	18,025940275170790	18,025940275170790	18,008634998188078
$-E_{n'}$	18	18	18	18	18	18	18

Таблица 2-36. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=36$

$n'l_j - n'l'_j$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,085133761293625456	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,0260667843816608	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,1318886558760835
dmD	,09474511973571658030	,08316075331915397513	,02091206733825499	,02807462514822950	,1318104804460475	,14632978148868942	,14528138097998629
GG'	,08415600104150903792	,08026877914013821952	,02585088296336067	,02902286440614671	,12706929362108408	,13106459313754210	,13056372296316133
FF'	,00026418259808757152	,00003165937875115645	,00007835156189131	-,0001771409191410	,00005842767785362	,00040964161177557	,00037780475003630
GF'	,00475777291854752787	-,0025489242503299936	-,0026216649338617	-,0026855024382670	,00613435925017619	,00621027345106491	,00572761834098556
FG'	,00556716317757244298	,00540923905059459275	-,0023955022531353	,00191440409949085	-,0014516001030664	,00864527328830684	,00861223492580310
κ/κ'	-1 / 1	-1 / -2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,96487628493369360172	,96487628493369360172	,96487628493369360	1,9826714920095679	,96487628493369360	1,9826714920095679	1,9826714920095679
γ'	,96487628493369360172	1,9826714920095679538	,96487628493369360	,96487628493369360	1,9826714920095679	1,9826714920095679	2,9884755721316254
N	1,9823603531818797963	1,9823603531818797963	1,9823603531818797	2	1,9823603531818797	2	2
N'	2,9764920862879468450	2,9942182592488370415	2,9764920862879468	2,9764920862879468	2,9942182592488370	2,9942182592488370	3
ε	,99118017659093989815	,99118017659093989815	,99118017659093989	,99133574600478397	,99118017659093989	,99133574600478397	,99133574600478397
ε'	,99609748622959062463	,99614364543947245902	,99609748622959062	,99609748622959062	,99614364543947245	,99614364543947245	,99615852404387516
$-E$	165,62627516518949838	165,62627516518949838	165,62627516518949	162,70485810845361	165,62627516518949	162,70485810845361	162,70485810845361
$-E_n$	162	162	162	162	162	162	162
$-E'$	73,284780158953838855	72,417962577386051303	73,284780158953838	73,284780158953838	72,417962577386051	72,417962577386051	72,138559270473505
$-E_n'$	72	72	72	72	72	72	72

Таблица 2-54. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=54$

$n'l_j - n'l'_j$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,05675584086241697	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,01737785625444059	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,0879257705840557
dmD	,065843069705282846	,051923445072615573	,012217182090642088	,021175478115975704	,08516572795066560	,10206502741660971	,10071346355929142
GG'	,055230897741186297	,049357498280291309	,017028114281532840	,021964129036705097	,08057510258680235	,08667684020994287	,08593197717353412
FF'	,000394303305114211	,000029236462432209	,000111910218554438	-,00026909425695473	,00007826313776033	,00061212234883918	,00056392949879688
GF'	,004682717276809484	-,00262916101370225	-,00256701889863584	-,00270475394822958	,00597225956266542	,00615264093168988	,00566823891247368
FG'	,005535151382172854	,005165871343594305	-,00235582351080935	,002185197284454919	-,0014598973365625	,00862342392613777	,00854931797448673
$8/8'$	-1/1	-1/-2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,919085987142527451	,919085987142527451	,919085987142527451	1,96079551502999775	,91908598714252745	1,9607955150299977	1,9607955150299977
γ'	,919085987142527451	1,96079551502999775	,919085987142527451	,919085987142527451	1,9607955150299977	1,9607955150299977	2,9740072380143519
N	1,95912530846933190	1,95912530846933190	1,95912530846933190	2	1,9591253084693319	2	2
N'	2,945563434823665183	1,96079551502999775	2,94556343482365183	2,94556343482365183	2,9869032508703718	2,9869032508703718	3
ε	,979562654234665954	,979562654234665954	,979562654234665954	,980397757514998875	,97956265423466595	,98039775751499887	,98039775751499887
ε'	,991011075379298506	,991259262973192584	,991011075379298506	,991011075379298506	,99125926297319258	,99125926297319258	,99133574600478397
$-E$	383,790161818677581	383,790161818677581	383,790161818677581	368,107869862844356	383,79016181867758	368,10786986284435	368,10786986284435
$-E_n$	729/2 = 364,5	729/2	729/2	729/2	729/2	729/2	729/2
$-E'$	168,801804029102288	164,141122651212039	168,801804029102288	168,801804029102288	164,14112265121203	164,14112265121203	162,70485810845361

$-E_{n'}$	162	162	162	162	162	162	162
Таблица 2-86. Дипольные моменты $\langle G r G' \rangle$, $\langle F r F' \rangle$, $\langle G r F' \rangle$, $\langle F r G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=86$							
$n'l_j - n'l'_j$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,0356373884484943772	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,0109116771830208	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,0552092047853373
dmD	,04339400581814768170	,03052069485546874867	,00574432716374939295	,01896412035837617	,04691550198008891	,06867178194256122	,06676069330155377
GG'	,03289598770111691275	,02334256453139369298	,01021627868791718722	,01902036446439304	,04285790622850658	,05316172428480578	,05200455791798453
FF'	,00061885109963282943	-.0000463893911267304	,00015034478890030703	-.0004322475898374	,00007885813058173	,00096401614555692	,00088531347892735
GF'	,00444636458109612944	,00284801528445399648	-,0023944510511310021	-,0026854720012314	,00544760507392509	,00598924882057022	,00550028413314312
FG'	,00543280243630181008	,00437650443074778967	-,0022278452619370992	,00306147548505197	-,0014688674529245	,00855679269162829	,00837053777149877
κ/κ'	-1 / 1	-1 / -2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,77855827391488270790	,77855827391488270790	,77855827391488270790	1,8989873580098740	,77855827391488270	1,8989873580098740	1,8989873580098740
γ'	,77855827391488270790	1,8989873580098740436	,77855827391488270790	,77855827391488270	1,8989873580098740	1,8989873580098740	2,9336245475318278
N	1,8860319583267313808	1,8860319583267313808	1,8860319583267313808	2	1,8860319583267313	2	2
N'	2,8485492966876193473	2,9661380136500304269	2,8485492966876193473	2,8485492966876193	2,9661380136500304	2,9661380136500304	3
ε	,94301597916336569039	,94301597916336569039	,94301597916336569039	,94949367900493702	,94301597916336569	,94949367900493702	,94949367900493702
ε'	,97542923941877209170	,97736091330506801737	,97542923941877209170	,97542923941877209	,97736091330506801	,97736091330506801	,97787484917727594
$-E$	1070,0952476454476540	1070,0952476454476540	1070,0952476454476540	948,45139530986777	1070,0952476454476	948,45139530986777	948,45139530986777
$-E_n$	1849/2 = 924,5	1849/2	1849/2	1849/2	1849/2	1849/2	1849/2
$-E'$	461,41100159261854650	425,13635801047970331	461,41100159261854650	461,41100159261854	425,13635801047970	425,13635801047970	,05555563773381420
$-E_{n'}$	3698/9 \cong 410,888..	3698/9	3698/9	3698/9	3698/9	3698/9	3698/9

$n'l_j - n'l'_j$	$2s - 3p \frac{1}{2}$	$2s - 3p \frac{3}{2}$	$2p \frac{1}{2} - 3s$	$2p \frac{3}{2} - 3s$	$2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$	$2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$
Таблица 2-101. Дипольные моменты $\langle G r G' \rangle$, $\langle F r F' \rangle$, $\langle G r F' \rangle$, $\langle F r G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 101$							
dmS	$\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,03034470699574768	$\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$	0,009291131066730	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$	$\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$	0,047009817936029
dmD	,037061247167514401	,016186482889722901	,004098770481163448	,020298384669516771	,035547632900928395	,059918339416953273	,057755748288703303
GG'	,026820265982548721	,015445954219074916	,008340145649362399	,019577950317564181	,031888334645969976	,044560447987520108	,043223515944959931
FF'	,000618851099632829	-.00004638939112673	,000152207582063676	-.00043224758983743	,000078858130581735	,000964016145556929	,005392153841909376
GF'	,004267850874073442	-,00297420469029286	-,00226361040999422	-,00258628690348914	,005037598083702676	,005883784898799101	,005392153841909376
FG'	,005354279211259408	,003761122752067583	-,00212810954710503	,003738968845279173	-,00145715795932599	,008510090385077132	,008254765022906642
$8/8'$	-1/1	-1/-2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,675857187530098931	,675857187530098931	,675857187530098931	1,85924257103157341	,675857187530098931	1,85924257103157341	1,85924257103157341
γ'	,675857187530098931	1,85924257103157341	,675857187530098931	,675857187530098931	1,85924257103157341	1,85924257103157341	2,90805483750497650
N	1,83076879344722223	1,83076879344722223	1,83076879344722223	2	1,83076879344722223	2	2
N'	2,77550513422699251	2,95270810309165962	2,77550513422699251	2,77550513422699251	2,95270810309165962	2,95270810309165962	3
ε	,915384396723611116	,915384396723611116	,915384396723611116	,929621285515786707	,915384396723611116	,929621285515786707	,929621285515786707
ε'	,964097365388356023	,968345827356851738	,964097365388356023	,964097365388356023	,968345827356851738	,968345827356851738	,969351612501658835
$-E$	1588,98501041725271	1588,98501041725271	1588,98501041725271	1321,63239447180931	1588,98501041725271	1321,63239447180931	1321,63239447180931
$-E_n$	10201/ 8 = 1275,125	10201/ 8	10201/ 8	10201/ 8	10201/ 8	10201/ 8	10201/ 8
$-E'$	674,210736831191389	594,429442083261711	674,210736831191389	674,210736831191389	594,429442083261711	594,429442083261711	575,541938396990910
$-E_{n'}$	10201/18 \cong 566,722 ..	10201/ 18	10201/18	10201/18	10201/18	10201/18	10201/18

Таблица 2-118. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 118$

$n'l_j - n'l'_j$	$2s - 3p\ 1/2$	$2s - 3p\ 3/2$	$2p\ 1/2 - 3s$	$2p\ 3/2 - 3s$	$2p\ 1/2 - 3d\ 3/2$	$2p\ 3/2 - 3d\ 3/2$	$2p\ 3/2 - 3d\ 5/2$
dmS	$\sqrt{2^{20}3^7/5^{12}} Z^2 \cong$	0,02597301192008912	$\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2 \cong$	0,00795257828593044	$\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2$	$\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2 \cong$	0,0402372170469407
dmD	,031193573774357459	,006940031115734785	,002680214197342999	,023728775136772542	,024159795277043315	,052783709563086565	,050304498628545601
GG'	,021177218656629865	,007656205600536609	,006544311109297307	,021591729769877403	,021242311865134314	,037303424951513304	,035776677854889230
FF'	,000829807051096920	-,00032016373690940	,000130766162140875	-,00050730382516033	-,00000614256807583	,001298889290765293	,001186881901849550
GF'	,003966264239355270	-,00309709497127059	-,00204146105054958	-,00224177163904206	,004322172151709452	,005739781625681225	,005244821849347770
FG'	,005220283827275402	,002701084223378176	-,00195340202354560	,004886120831097539	-,00139854617172462	,008441613695126741	,008096117022459050
8/8'	-1/1	-1/ -2	1 / -1	-2 / -1	1 / 2	-2 / 2	-2 / -3
γ	,508456632395504189	,508456632395504189	,508456632395504189	1.80513937052710056	,508456632395504189	1.80513937052710056	1.80513937052710056
γ'	,508456632395504189	1.80513937052710056	,508456632395504189	,508456632395504189	1.80513937052710056	1.80513937052710056	2.87376549965841452
N	1.73692638439025629	1.73692638439025629	1.73692638439025629	2	1.73692638439025629	2	2
N'	2.65213622002754918	2.93432764718839827	2.65213622002754918	2.65213622002754918	2.93432764718839827	2.93432764718839827	3
ε	,868463192195128149	,868463192195128149	,868463192195128149	,902569685263550284	,868463192195128149	,902569685263550284	,902569685263550284
ε'	,945824959311270779	,955973465749442539	,945824959311270779	,945824959311270779	,955973465749442539	,955973465749442539	,957921833219471507
-E	2470.11198676164928	2470.11198676164928	2470.11198676164928	1829.63074990748646	2470.11198676164928	1829.63074990748646	1829.63074990748646
-E _n	3481 / 2 = 1740,5	3481 / 2	3481 / 2	3481 / 2	3481 / 2	3481 / 2	3481 / 2
-E'	1017.34578800971759	826.768353305335397	1017.34578800971759	1017.34578800971759	826.768353305335397	826.768353305335397	790.180223164041435
-E _{n'}	6962 / 9 \cong 773,555 ..	6962/9	6962/9	6962/9	6962/9	6962/9	6962/9

ЛИТЕРАТУРА

- 1a C. Schwartz, *Theory of hyperfine structure*, Phys. Rev. **97**, 380-395 (1955);
- 1b C. Schwartz, *Theory of hyperfine structure*, Phys. Rev. **105**, 173-183 (1957).
- 2a. L. Armstrong, Jr., *Group properties of radial wavefunctions*, J. de Phys. C **31**, no.11-12, 4-17 (1970).
- 2b. L. Armstrong, Jr., *Group properties of hydrogenic radial functions*, Phys. Rev. A **3**, no. 5, 1546-1550 (1971).
- 2c. L. Armstrong, Jr., *Theory of the hyperfine structure of free atoms* (Wiley, New York, 1971).
- 3 V. F. Tarasov, *New properties of the P. E. Appell hypergeometric series $F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y)$ to the vicinity of the singular point (1,1) and near the boundary of its domain of convergence $D_2: |x| + |y| < 1$* , Int. J. Modern Phys. B, **24**, n. 22 (2010) 4181-4202.
- 4 H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Plenum PC, New York, 1977).
5. A.I. Akhiezer and V.B. Berestetskii, *Quantum electrodynamics* (M., Nauka, 1969),p. 136
6. V. F. Tarasov, *Radial matrix elements with Dirac's functions in the theory of fine and hyperfine structures of hydrogen-like systems*, Int. J. Modern Phys. B **10**, no.20, 2553-2576 (1996).
7. V. F. Tarasov, *Exact analytical expressions and numerical values of diagonal matrix elements $\langle r^k \rangle_{nlj}$, $\langle g | r^k | g \rangle$, $\langle g | r^k | f \rangle$ and $\langle f | r^k | f \rangle$ with Dirac's radial functions $g(r)$ and $f(r)$ of H-like atoms (as $Z=1$, $n \leq 8$ and $-7 \leq k \leq 4$) and the symmetry of Appell's function $F_2(1,1)$* , Int. J. Modern Phys. B **22** (29), 5175-5205 (2008).
8. P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynomes d'Hermite* (Gauthier-Villars, Paris, 1926).
9. *Higher transcendental functions*, edited by A. Erdélyi (McGraw-Hill, 1953), Vol.1.
10. J. C. Slater, *Quantum Theory of Atomic Structure*, Vols. **1-2** (McGraw-Hill, New York,1960).
11. E. U. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra* (Cambridge, London, 1935).
12. I. I. Sobel'man, *An Introduction to the Theory of Atomic Spectra* (Nauka, Moskow,1977).

БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, РОССИЯ

E-mail address: vf_tarasov@mail.ru

Поступила в редакцию 1-го ноября 2012 г.