

**НЕДИАГОНАЛЬНЫЕ МАТРИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ $\langle g | r^k | g' \rangle, \langle f | r^k | f' \rangle,$
 $\langle g | r^k | f' \rangle, \langle f | r^k | g' \rangle$ С РАДИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ДИРАКА $g(r)$ И $f(r)$
ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ nlj - СОСТОЯНИЙ 3Н-АТОМА И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ЧЕРЕЗ ФУНКЦИИ АППЕЛЯ $F_2(x, y)$ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ (1,1).
СПЕКТРАЛЬНЫЕ СЕРИИ ЛАЙМАНА И БАЛЬМЕРА ($n \leq 3, n' \leq l \pm 1, k = 1$ И $Z = 1,$
 $2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$) И ГРАФИКИ РАДИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ $G(r) = rg, F(r)$
 $= rf$ И $P_{nl}(r)$ ДЛЯ $Z = 1, 118$ И $137, n < 3$**

ТАРАСОВ В. Ф.

ABSTRACT. This article deals with the connection between *a.m.* the off-diagonal matrix elements and *new* properties of Appell's function $F_2(x, y)$ to the vicinity of the singular point (1,1). Such approach allows to get the *exact* analytical expressions and numerical values of these elements for arbitrary nlj -states of 3H-like atoms and $Z \leq 118$. Relativistic dipole moments dmD of *T. Lyman's* (1906-1914) and *J. Balmer's* (1885) spectral series are compared with the values dmS on the basis of Schrödinger theory (as $n \leq 3, n' \leq l \pm 1, k = 1$ and $Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$) for the first time.

1. Введение

При исследовании эффектов тонкой (FS) и сверхтонкой структуры (HFS) спектра водорода возникает практическая необходимость вычислять *релятивистские* матричные элементы с радиальными функциями Дирака $g(r)$ и $f(r)$, обычно они вычисляются *приближённо* [1, 2], т.е. заменяя функции Дирака f и g через функции Бесселя

$$rg \cong C \cdot \left(\frac{x}{2} J_{2\gamma+1}(x) - (\gamma + 8) J_{2\gamma}(x) \right), \quad rf \cong C \cdot \alpha Z J_{2\gamma}(x),$$

где $x = \sqrt{8Zr/a_0}$, C – постоянная нормировки, $\alpha Z \ll 1$.

Например, при рассмотрении эффектов *первого* порядка HFS- взаимодействий часто встречаются интегралы $\langle f | r^k | f \rangle, \langle g | r^k | g \rangle, \langle f | r^k | g \rangle$ и $\langle r^k \rangle_{nlj}$, которые из-за этой аппроксимации содержат т.н. "*релятивистские поправочные множители*" типа F, R, T ; при рассмотрении эффектов *второго* порядка HFS- взаимодействий встречаются недиагональные матричные элементы, которые содержат "*множители*" G и S .

В этой статье релятивистские матричные элементы изучаются с помощью *нового* метода, т.е. с помощью гипергеометрических функций Аппеля $F_2(x, y)$ и их *новых* свойств в U - окрестности особой точки (1,1) [3]

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y = 2, x = 1 \mp \delta, 0 \leq \delta < 1\}, \quad \overset{\circ}{U} = U \setminus \{(1,1)\}.$$

В частности, для многих исследователей, которые решают различные задачи в квантовой механике и атомной физике вызывает большой интерес найти *точные* аналитические выражения и численные значения этих *недиагональных* матричных элементов. Подобные задачи рассматривались ранее [4, 5]. Радиальные функции Дирака могут быть представлены в виде [4, 6, 7]

2010 *Mathematics Subject Classification.* 33C65, 81Q05, 81Q35

Key words and phrases: Dirac's radial functions $g(r)$ and $f(r)$ of H-like atoms, Appell's function $F_2(x, y)$, the effects of fine and hyperfine structures of hydrogen spectrum, Lyman's and Balmer's spectral series.

$$\left. \begin{aligned} F_{nlj}(r) &= -rf(r) \\ G_{nlj}(r) &= -rg(r) \cdot s \end{aligned} \right\} = -A \sqrt{1 \mp \varepsilon} e^{-u/2} u^\gamma \left[(N - \kappa) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} -n_r \\ 2\gamma + 1 \end{matrix} \middle| u \right) \pm n_r {}_1F_1 \left(\begin{matrix} 1 - n_r \\ 2\gamma + 1 \end{matrix} \middle| u \right) \right] \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ s \end{Bmatrix},$$

где $u = 2\lambda_N r$, $\lambda_N = Z/N$, $\varepsilon = E_{rel}/mc^2 = \sqrt{1 - (\alpha\lambda_N)^2} < 1$, $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (\alpha Z)^2} < |\kappa|$, $N = \sqrt{n^2 - 2n_r} (|\kappa| - \gamma) < n$, $\kappa = l(l+1) - j(j+1) - 1/4$, $n_r = n - |\kappa|$, $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137,0359997650$, $s \equiv \text{sign}(\kappa)$,

$$n_r = n - |\kappa| = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & \text{if } \kappa < 0, \quad j = l + 1/2, \quad l \geq 0, \\ 1, 2, 3, \dots, & \text{if } \kappa > 0, \quad j = l - 1/2, \quad l > 0, \end{cases}$$

A – нормировочная постоянная, $A^2 = 2\lambda_N (2\gamma + 1)_{n_r} / (4N(N - \kappa)\Gamma(n_r - 1)\Gamma(2\gamma + 1))$,

$E = E_{rel} - E_0 = -(1 - \varepsilon)/\alpha^2 < 0$ (в а.е. e^2/a_0); символ $(a)_k = \Gamma(a + k)/\Gamma(a)$, $(a)_0 = 1$.

Из условия $Z_c(n) = \sqrt{n^2 - 1/4} / \alpha$ имеем $Z_c(1) = \sqrt{3}/(2\alpha) \cong 118,67665702948836450$ и $\varepsilon = 1/2$.

Таким образом, при рассмотрении эффектов HFS- взаимодействий появляются интегралы [1, 2, 6]:

$$\langle g | r^k | g' \rangle = \int_0^\infty gg' r^{k+2} dr, \quad \langle f | r^k | f' \rangle = \int_0^\infty ff' r^{k+2} dr, \quad (1')$$

$$\langle g' | r^k | f \rangle = \int_0^\infty fg' r^{k+2} dr, \quad \langle g | r^k | f' \rangle = \int_0^\infty gf' r^{k+2} dr,$$

$$\langle gg' | r^k | ff' \rangle_\pm = \int_0^\infty (gg' \pm ff') r^{k+2} dr, \quad \langle fg' | r^k | f'g \rangle_\pm = \int_0^\infty (fg' \pm f'g) r^{k+2} dr, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1'')$$

где nlj - и $n'l'j'$ - разные состояния.

Если ввести “средне арифметический радиус” $\bar{u} = (\lambda_N + \lambda_{N'})r$ для (nlj) - и $(n'l'j')$ - состояний, тогда интегралы (1') могут быть представлены в “безразмерном” виде:

$$\begin{aligned} \langle g | \bar{u}^k | g' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle g | r^k | g' \rangle, & \langle f | \bar{u}^k | f' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle f | r^k | f' \rangle, \\ \langle g | \bar{u}^k | f' \rangle &= (\lambda_N + \lambda_{N'})^k \langle g | r^k | f' \rangle, & \langle g' | \bar{u}^k | f \rangle &= (\lambda_{N'} + \lambda_N)^k \langle g' | r^k | f \rangle, \dots \end{aligned}$$

Интегралы (1) здесь вычисляются с помощью функций Аппеля F_2 и их *новых* свойств [3,7-9]

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{q-1} {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x_1 t \right) {}_1F_1 \left(\begin{matrix} \beta' \\ \gamma' \end{matrix} \middle| x_2 t \right) dt = \frac{\Gamma(q)}{\lambda^q} F_2 \left(q \middle| \begin{matrix} \beta, \beta' \\ \gamma, \gamma' \end{matrix} \middle| x, y \right),$$

где $\text{Re } q > 0$, $\text{Re } \lambda > 0$, $x = x_1/\lambda$, $y = x_2/\lambda$, $x + y = 2$, $x \neq y$.

Знание этих свойств позволяет существенно упростить многие аналитические вычисления релятивистских интегралов и часто обнаружить их “скрытую” симметрию.

В таблицах 1-Z и 2-Z впервые даны *точные* численные значения этих интегралов для серий Лаймана (Т. Lyman, 1906-1914) и Бальмера (J. Balmer, 1885), когда $n \leq 3$, $n' \leq 3$, $k = 1$, $Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118$.

2. Основная теорема

Используя формулы (1'), получаем

Теорема 1. Аналитические выражения “усреднённых” матричных элементов $\langle F | \bar{u}^k | F' \rangle$, $\langle G | \bar{u}^k | G' \rangle$, $\langle F | \bar{u}^k | G' \rangle$ и $\langle G | \bar{u}^k | F' \rangle$ с помощью функций Аппеля $F_2(x, y)$ имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \langle F | \bar{u}^k | F' \rangle \\ \langle G | \bar{u}^k | G' \rangle \end{aligned} \right\} = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 \mp \varepsilon)(1 \mp \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) + aa' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right. \\ & \left. \pm (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \pm a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right] \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ s \cdot s' \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

$$\langle F | \bar{u}^k | G' \rangle = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) - aa' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right. \\ & \left. - (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) + a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right] \cdot s', \end{aligned}$$

$$\langle G | \bar{u}^k | F' \rangle = \frac{1}{4} x^{c/2} y^{c'/2} \sqrt{(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon')} \frac{\Gamma(q)}{\sqrt{\Gamma(c)\Gamma(c')}} \sqrt{\frac{(c)_a (c')_{a'}}{a! a'! N N' (N - \kappa) (N' - \kappa')}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[(N - \kappa) (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) - aa' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right. \\ & \left. + (N - \kappa) a' F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} -a, 1-a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) - a (N' - \kappa') F_2 \left(q \left| \begin{array}{c} 1-a, -a' \\ 2\gamma + 1, 2\gamma' + 1 \end{array} \right| x, y \right) \right] \cdot s, \end{aligned}$$

где $q = \gamma + \gamma' + k + 1 > 0$, $s' \equiv \text{sign}(\kappa')$, $a \equiv n_r$, $a' \equiv n'_r$, $x = 2N' / (N + N')$, $y = 2N / (N + N')$, $x + y = 2$.

Очевидно, формулы (2)-(4) симметричны при перестановках: $n_r \leftrightarrow n'_r$, $\gamma \leftrightarrow \gamma'$, $a \leftrightarrow a'$, $N \leftrightarrow N'$, $\varepsilon \leftrightarrow \varepsilon'$, $x \leftrightarrow y$. Как видно, вычисление и свойства этих матричных элементов зависят *только* от свойств функции Аппеля $F_2(x, y)$ в U -окрестности. В частности, имеем [7]:

$$\langle G^2 | u^k | F^2 \rangle_+ = \langle u^k \rangle_{nlj}, \quad \langle G^2 | u^k | F^2 \rangle_- = \langle u^k \rangle_{nlj} - 2 \langle F | u^k | F \rangle_{nlj},$$

где $\langle u^k \rangle_{nlj} = (2\lambda_N)^k < r^k \rangle_{nlj}$.

3. Фундаментальные спектральные серии ЗН-атомов с функциями Дирака $g(r)$ и $f(r)$

Исходя из теоремы 1, сначала рассмотрим *дипольные* матричные элементы (в а.е. a_0) серии Лаймана (Лузан, 1906); для фундаментальной линии водорода L_α разрешены переходы [10-12]:

$$1s_{1/2} \leftrightarrow np_{1/2}, \quad 1s_{1/2} \leftrightarrow np_{3/2}, \quad n \geq 2.$$

Пример 1-2. Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 2p_{1/2}$ имеем (Таблица 1-1, $Z=1$):

$$\begin{aligned} dmD \equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong & (1,2902530706935518806 + 0,00001073562817113252) \\ & + (0,00294229590771968585 + 0,00470777843155930458) \end{aligned}$$

$$\cong 1,2902638063217230131 + 0,00765007433927899043 \cong 1,29791388066100200353$$

$$\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 1s | r | 2p \rangle = \sqrt{2^{15} / 3^9} \cong 1,2902662019598633603 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0,$$

где dmS – дипольный момент с радиальными функциями Шрёдингера $P_n(r)$.

Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 2p_{3/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (1,2902325076371208898 + 0,00000858847142179009) \\ &\quad + (0,00235382819850724187 + 0,00470770340262447653) \\ &\cong 1,2902410961085426798 + 0,0070615316011317184 \cong 1,2973026277096743982 \rightarrow \text{dmS} \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пример 1-3. Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{1/2}$ имеем (Таблица 1-1, $Z=1$):

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (0,51667753204551479691 + 0,00000382132868295074) \\ &\quad + (0,00104730525002075670 + 0,00188521414649892843) \\ &\cong 0,51668135337419774765 + 0,00293251939651968513 \cong 0,51961387277071743278 \\ &\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 1s | r | 3p \rangle = \sqrt{3^7 / 2^{13}} \cong 0,51668924261832663008 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Для перехода $1s_{1/2} \leftrightarrow 3p_{3/2}$ имеем

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (0,51667735012829229128 + 0,00000534998308470164) \\ &\quad + (0,00146626104085967163 + 0,00188521348273303948) \\ &\cong 0,51668270011137699292 + 0,00335147452359271111 \cong 0,52003417463496970403 \rightarrow \text{dmS} \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Аналогично построены все Таблицы 1-Z серии Лаймана.

Исходя из теоремы 1, рассмотрим теперь *дипольные* матричные элементы серии Бальмера (Balmer, 1885); для фундаментальной линии водорода H_α разрешены переходы [10-12]:

$$\begin{aligned} 2s_{1/2} &\leftrightarrow np_{1/2}, \quad 2s_{1/2} \leftrightarrow np_{3/2}, \quad 2p_{1/2} \leftrightarrow ns_{1/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow ns_{1/2}, \\ 2p_{1/2} &\leftrightarrow nd_{3/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow nd_{3/2}, \quad 2p_{3/2} \leftrightarrow nd_{5/2}, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Пример 2-3. Для перехода $2s \leftrightarrow 3p_{1/2}$ имеем (Таблица 2-1, $Z=1$):

$$\begin{aligned} \text{dmD} &\equiv GG' + FF' + GF' + FG' \cong (3,0647890428180054417 + 0,0000073668963246701) \\ &\quad + (0,0048146528436505733 + 0,0055912415029017388) \\ &\cong 3,0647964097143301122 + 0,0104058943465523121 \cong 3,0752023040608824243 \\ &\rightarrow \text{dmS} \equiv \langle 2s | r | 3p \rangle = \sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} \cong 3,06481540657051644 \text{ при } \alpha Z \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Аналогично построены все Таблицы 2-Z серии Бальмера.

Однако, есть *один* случай

$$GF'(2s_{1/2}, 2p_{1/2}) = \alpha Z \frac{c\sqrt{c}}{4(c+1)} \left[{}_3F_2 \left(\begin{matrix} -1, -1, 2 \\ c, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right) - 1 + 2 {}_2F_1 \left(\begin{matrix} c+1, -1 \\ c \end{matrix} \middle| 1 \right) \right] = 0,$$

где $c = 2\gamma + 1$, $\gamma = 0,99997337396853164013$.

4. Графики радиальных функций Дирака $G(r)$ и $F(r)$ для nlj – состояний и функция $P_{nl}(r)$ атома водорода, $Z=1$, 118 и 137, $n < 3$

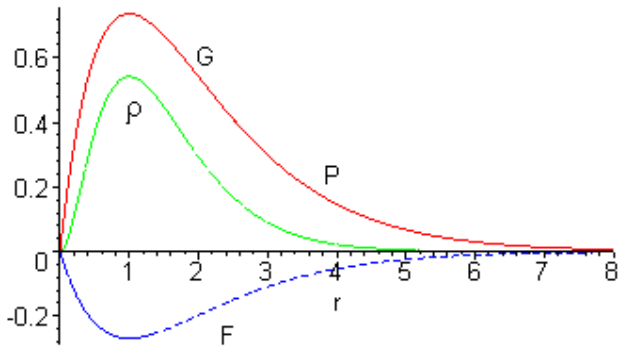


Рис.1. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $m=100$ и $P_{10}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=-1$, $N=n=1$, $n_r=0$, $\gamma = \varepsilon = 0.99997337396853164013$, $E = -0.50000665659648640754$, $E_n = -1/2$.

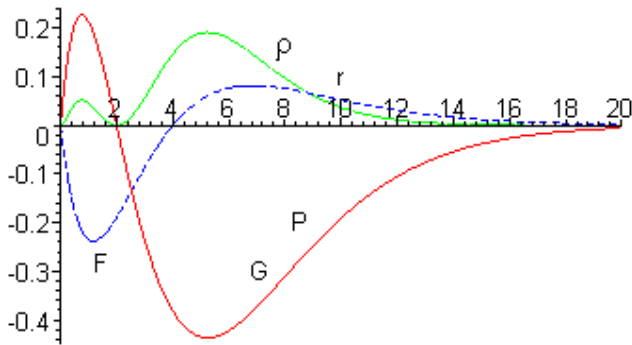


Рис.2. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r) > 0$ для $2s$ - состояния, $m=200$ и $P_{20}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=-1$, $n=2$, $n_r=1$, $N=1.9999866869399564281$, $\gamma = 0.99997337396853164013$, $\varepsilon = 0.99999334346997821406$, $E = -0.12500208018917151638$, $E_n = -1/8$.

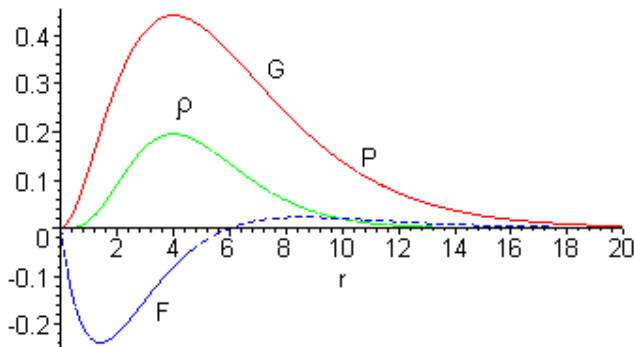


Рис.3. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $2p^{1/2}$ - состояния, $m=200$ и $P_{21}(r)$, где $Z=1$, $\kappa=1$, $n=2$, $n_r=1$, $N=1.9999866869399564281$, $\gamma = 0.99997337396853164013$, $\varepsilon = 0.99999334346997821406$, $E = -0.12500208018917151638$, $E_n = -1/8$.

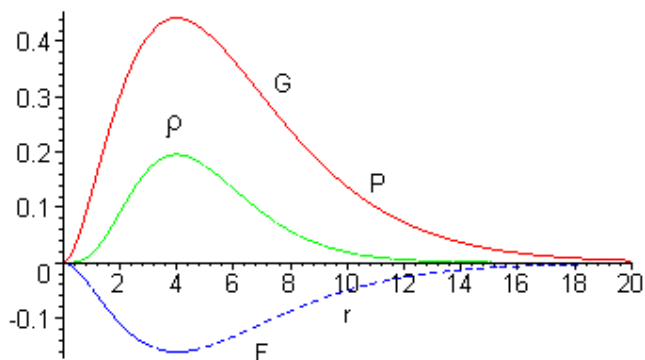


Рис.4. Функции $G(r)$, $mF(r)$, $\rho(r)$ для $2p_{3/2}$ -состояния, $m = 200$ and $P_{21}(r)$, где $Z=1$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$, $n_r = 0$, $\gamma = 1.9999866871171939958$, $\varepsilon = 0.99999334355859699792$, $E = -0.12500041602897242177$, $E_n = -1/8$.

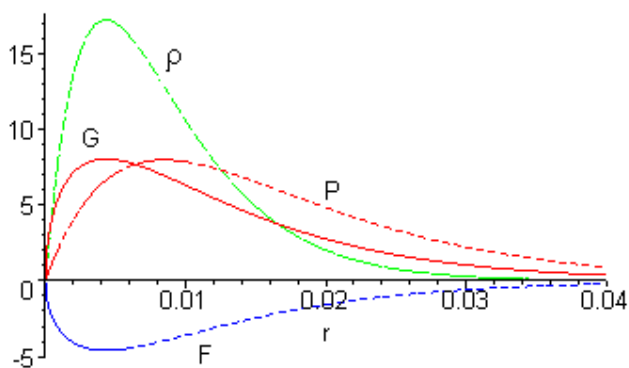


Рис.5. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $M = 1/5$ and $P_{10}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -1$, $N = n = 1$, $n_r = 0$, $\gamma = \varepsilon = 0.50845663239550418996$, $E = -9230.6266557282426940$, $E_n = -6962$.

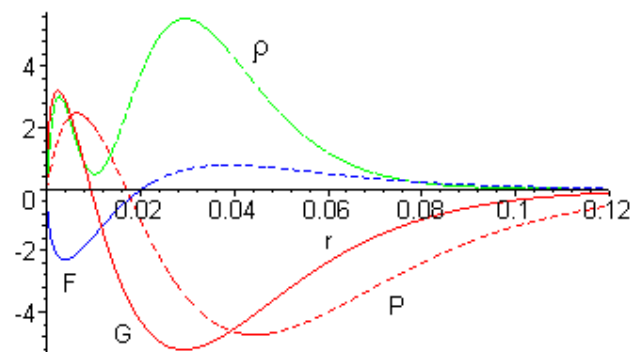


Рис.6. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r) > 0$ для $2s$ -состояния, $M = 1/5$ и $P_{20}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -1$, $n = 2$, $n_r = 1$, $N = 1.7369263843902562988$, $\gamma = 0.50845663239550418996$, $\varepsilon = 0.86846319219512814940$, $E = -2470.1119867616492849$, $E_n = -1740,5$.

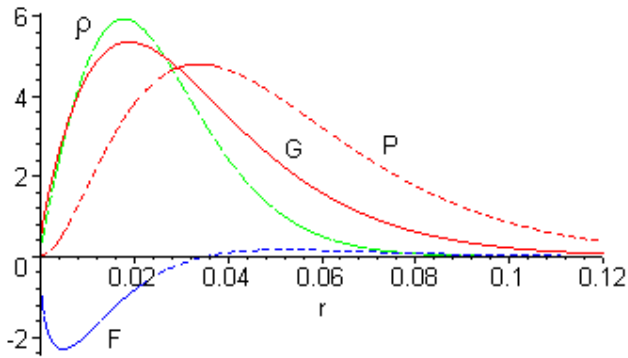


Рис.7. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{1}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{5}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = 1$, $n = 2$, $n_r = 1$, $N = 1.7369263843902562988$, $\gamma = 0.50845663239550418996$, $\varepsilon = 0.86846319219512814940$, $E = -2470.1119867616492849$, $E_n = -1740,5$.

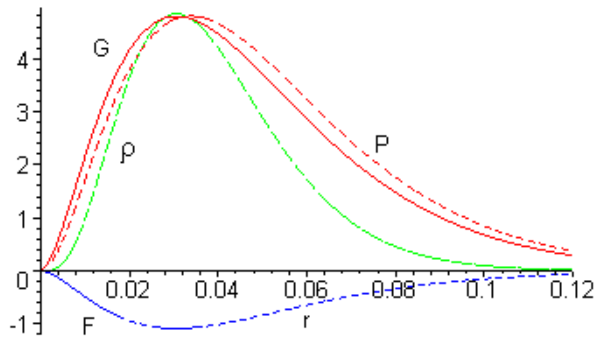


Рис.8. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{3}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{5}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=118$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$, $n_r = 0$, $\gamma = 1.8051393705271005697$, $\varepsilon = 0.90256968526355028485$, $E = -1829.6307499074864606$, $E_n = -1740,5$.

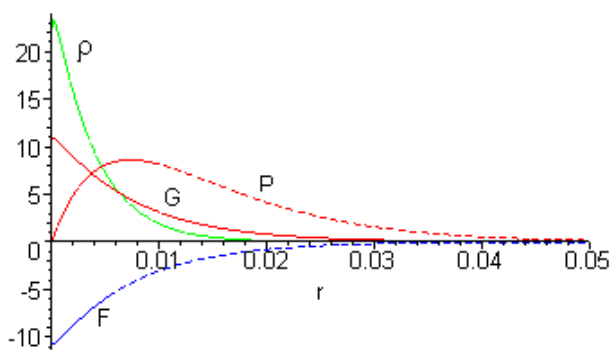


Рис.9. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $1s$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{10}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -1$, $N = n = 1$, $n_r = 0$, $\gamma = \varepsilon = 0.022920229923976769741$, $E = -18348.449322773593389$, $E_n = -9384,5$.

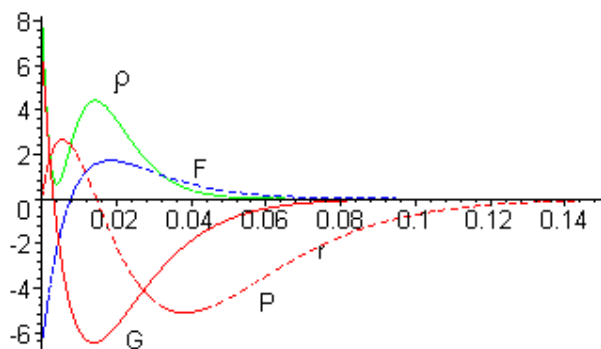


Рис.10. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r) > 0$ для $2s$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{20}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -1$, $n = 2$, $n_r = 1$,
 $N = 1.4303287943154726057$, $\gamma = 0.022920229923976769741$, $\varepsilon = 0.71516439715773630285$,
 $E = -5348.8893989344408348$, $E_n = -2346,125$.

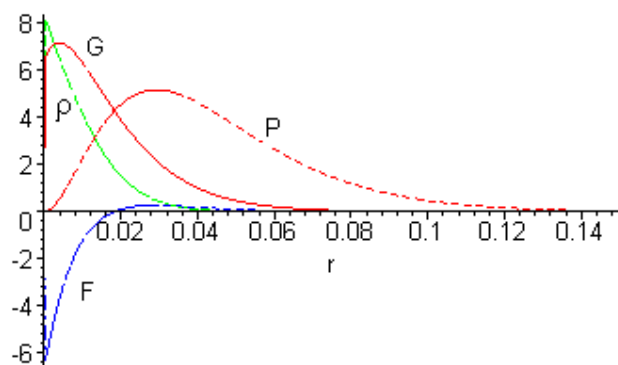


Рис.11. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{1}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = 1$, $n = 2$, $n_r = 1$,
 $N = 1.4303287943154726057$, $\gamma = 0.022920229923976769741$, $\varepsilon = 0.71516439715773630285$,
 $E = -5348.8893989344408348$, $E_n = -2346,125$.

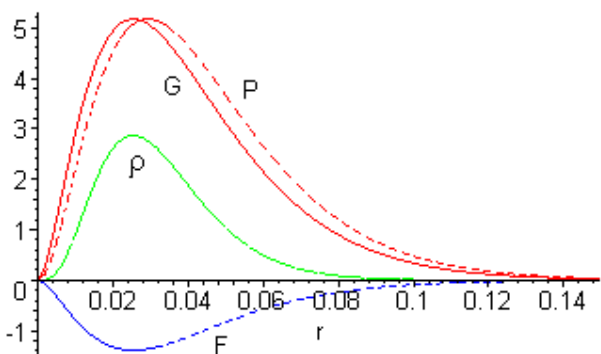


Рис.12. Функции $G(r)$, $F(r)$, $M\rho(r)$ для $2p \frac{3}{2}$ -состояния, $M = \frac{1}{10}$ и $P_{21}(r)$, где $Z=137$, $\kappa = -2$, $N = n = 2$,
 $n_r = 0$, $\gamma = 1.732202452642231446$, $\varepsilon = 0.86610122632111657231$, $E = -2514.4670255913346512$,
 $E_n = -2346,125$.

Таблица 1. Точные численные значения дипольных моментов спектральных серий 3N-атома для Z = 1, 2, 10, 18, 36, 54, 86, 101, 118

Таблица 1-1. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, Z = 1.

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|-----------------|---------------------------|-----------------------|---------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} \cong$ | 1,29026620195986336 | $\sqrt{3^7/2^{13}} \cong$ | 0,51668924261832663 |
| dmD | 1,2979138806610020035 | 1,2973026277096743982 | ,51961387277071743278 | ,52003417463496970403 |
| GG' | 1.2902530706935518806 | 1.2902325076371208898 | ,51667753204551479691 | ,51667735012829229128 |
| FF' | .00001073562817113252 | .00000858847142179009 | .00000382132868295074 | .00000534998308470164 |
| GF' | ,00294229590771968585 | ,00235382819850724187 | ,00104730525002075670 | ,00146626104085967163 |
| FG' | ,00470777843155930458 | ,00470770340262447653 | ,00188521414649892843 | ,00188521348273303948 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 |
| γ' | .99997337396853164013 | 1.9999866871171939958 | .99997337396853164013 | 1.9999866871171939958 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.9999866869399564281 | 2 | 2.9999822492598396307 | 2.9999955623691159040 |
| ε | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 | .99997337396853164013 |
| ε' | .99999334346997821406 | .99999334355859699792 | .99999704155205912292 | .99999704157831656948 |
| -E | .50000665659648640754 | .50000665659648640754 | .50000665659648640754 | .50000665659648640754 |
| -E _n | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 |
| -E' | .12500208018917151638 | .12500041602897242177 | .05555629517641473772 | .0555580209136446172 |
| E _{n'} | 1/8 = 0,125 | 1/8 | 1/18 \cong 0,0555 .. | 1/18 |

где $E_n = -\frac{1}{2} Z^2 / n^2$, $E_{n'} = -\frac{1}{2} Z^2 / n'^2$, $E = (\varepsilon - 1)/\alpha^2 < 0$, $E' = (\varepsilon' - 1)/\alpha^2 < 0$.

Таблица 1-2. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, Z = 2

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|-----------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,64513310097993168 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,25834462130916331 |
| dmD | ,65277825575366037139 | ,65214407685412150068 | ,26126116929993876530 | ,26168286395906451134 |
| GG' | .64510683542288506480 | .64506571052479034200 | .25832119806548582244 | .25832083562105392483 |
| FF' | .00002147087943663357 | .00001717645462577115 | .00000764196125310251 | .00001069972925638652 |
| GF' | ,00294212674051207761 | ,00235366728274066071 | ,00104716803142905241 | ,00146617001200906394 |
| FG' | ,00470782271082659541 | ,00470752259196472682 | ,00188516124177078794 | ,00188515859674513605 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 |
| γ' | .99989349162000015892 | 1.9999467479370632802 | .99989349162000015892 | 1.9999467479370632802 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.9999467451009790120 | 2 | 2.9999289935730146604 | 2.9999822492598396307 |
| ε | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 | .99989349162000015892 |
| ε' | .99997337255048950601 | .99997337396853164013 | .99998816573555888818 | .99998816615572138488 |
| -E | 2.0001065140523194386 | 2.0001065140523194386 | 2.0001065140523194386 | 2.0001065140523194386 |
| -E _n | 2 | 2 | 2 | 2 |
| -E' | .50003328581861576767 | .50000665659648640754 | .22223405705467306979 | .2222616687977217081 |
| E _{n'} | 1/2 | 1/2 | 2/9 \cong 0,2222 .. | 2/9 |

Таблица 1-10. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 10$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|----------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,12902662019598633 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,05166892426183266 |
| dmD | ,13664803711783544914 | ,13582541937683176684 | ,054515797971436414441 | ,05494999435778000918 |
| GG' | ,12889480730398554980 | ,12868937766849415565 | ,05155147166761353131 | ,05154988224814365063 |
| FF' | ,00010729385205214863 | ,00008580395574725098 | ,00003809812877613376 | ,00005346061266175089 |
| GF' | ,00293670402596558827 | ,00234851128435815221 | ,001042771100288657590 | ,00146325249239857794 |
| FG' | ,00470923193583216242 | ,00470172646823220799 | ,001883457074758091769 | ,00188339900457602971 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 |
| γ' | ,99733387819770927543 | 1,9986682727758709286 | ,99733387819770927543 | 1,9986682727758709286 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1,9986664945396514429 | 2 | 2,9982220586192139317 | 2,9995560580778852744 |
| ε | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 | ,99733387819770927543 |
| ε' | ,99933324726982572143 | ,99933413638793546428 | ,99970376429625973254 | ,99970402776783467138 |
| $-E$ | 50,066742016229567448 | 50,066742016229567448 | 50,066742016229567448 | 50,066742016229567448 |
| $-E_n$ | 50 | 50 | 50 | 50 |
| $-E'$ | 12,520859662739522155 | 12,504163033581692388 | 5,5629703573246167468 | 5,5580226601264846935 |
| $-E_{n'}$ | 12,5 | 12,5 | 50/9 \cong 5,555 .. | 50/9 |

Таблица 1-18. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 18$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|----------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,07168145566443685 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,02870495792324036 |
| dmD | ,07927145102547627702 | ,07825186021029502674 | ,0314720863891016866 | ,03192194761639177423 |
| GG' | ,07144213857101051499 | ,07107319036166175955 | ,02849212106570895736 | ,02849020135578251806 |
| FF' | ,00019287135136094301 | ,00015411541178205432 | ,00006810348718393965 | ,00009606761384368240 |
| GF' | ,00292397988484649528 | ,00233642975390494049 | ,00103246659085764913 | ,00145641002918285682 |
| FG' | ,00471246121825832373 | ,00468812468294627238 | ,00187939524535114046 | ,00187926861758271694 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 |
| γ' | ,99133574600478397691 | 1,9956819790003770966 | ,99133574600478397691 | 1,9956819790003770966 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1,9956631709809067762 | 2 | 2,9942182592488370415 | 2,9985603142176003583 |
| ε | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 | ,99133574600478397691 |
| ε' | ,99783158549045338809 | ,99784098950018854828 | ,99903730690468229125 | ,99904009427338322805 |
| $-E$ | 162,70485810845361258 | 162,70485810845361258 | 162,70485810845361258 | 162,70485810845361258 |
| $-E_n$ | 162 | 162 | 162 | 162 |
| $-E'$ | 40,720363841006831367 | 40,543767209553668827 | 18,078283896356443819 | 18,025940275170790974 |
| $-E_{n'}$ | 81/2 | 81/2 | 18 | 18 |

Таблица 1-36. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, $Z = 36$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|----------------|-------------------------------|------------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,03584072783221842 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,01435247896162018 |
| dmD | ,043320154848999104472 | ,041829415841771349557 | ,016893443382557937353 | ,01739639819115669894 |
| GG' | .035343713522939695603 | .034613205156840974567 | .013914146650613955566 | .01391865821471140956 |
| FF' | .000383396177888463299 | .000305258507486654879 | .000131963196278323845 | .00019067482882135753 |
| GF' | ,002867577485040533196 | ,002283153754966394079 | ,000987006945624256172 | ,00142613535978219646 |
| FG' | ,004725467663130412371 | ,004627798422477326034 | ,001860326590041401769 | ,00186092978784173539 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 |
| γ' | .96487628493369360172 | 1.9826714920095679538 | .96487628493369360172 | 1.9826714920095679538 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.9823603531818797963 | 2 | 2.9764920862879468450 | 2.9942182592488370415 |
| ε | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 | .96487628493369360172 |
| ε' | .99118017659093989815 | .99133574600478397691 | .99609748622959062463 | .99614364543947245902 |
| $-E$ | 659.58351166304325712 | 659.58351166304325712 | 659.58351166304325712 | 659.58351166304325712 |
| $-E_n$ | 648 | 648 | 648 | 648 |
| $-E'$ | 165.62627516518949838 | 162.70485810845361258 | 73.284780158953838855 | 72.417962577386051303 |
| $E_{n'}$ | 162 | 162 | 72 | 72 |

Таблица 1-54. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, $Z = 54$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|----------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,02389381855481228 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,00956831930774678 |
| dmD | ,0311796545015827399 | ,02918619070591303962 | ,0117950980263817936 | ,01239017439496395742 |
| GG' | .02309904671272689940 | .02202309388368650684 | .00887732040650169055 | .00890601427584566362 |
| FF' | .00056857002976916316 | .00044990378698013622 | .00018653026678742104 | .00028201302377134950 |
| GF' | ,00276897675967632236 | ,00219106365972920202 | ,00090841575649052212 | ,00137342362042183225 |
| FG' | ,00474306099941035496 | ,00452212937551719453 | ,00182283159660215989 | ,00182872347492511205 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 |
| γ' | .91908598714252745136 | 1.9607955150299977508 | .91908598714252745136 | 1.9607955150299977508 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.9591253084693319082 | 2 | 2.9455634348236518339 | 2.9869032508703718476 |
| ε | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 | .91908598714252745136 |
| ε' | | | | |
| $-E$ | 1519.4733427978666894 | 1519.4733427978666894 | 1519.4733427978666894 | 1519.4733427978666894 |
| $-E_n$ | 1458 | 1458 | 1458 | 1458 |
| $-E'$ | 383.79016181867758161 | 368.10786986284435643 | 168.80180402910228878 | 164.14112265121203972 |
| $-E_{n'}$ | 729/2 = 364,5 | 729/2 | 162 | 162 |

Таблица 1-86. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 86$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|------------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,01500309537162631 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,00600801444905030 |
| dmD | ,02155863405066773748 | ,01612242665543373278 | ,00731326969728336613 | ,008253507015775855388 |
| GG' | ,01347581012175293281 | .02196412903670509770 | .00473583558965814469 | .004890998111840057487 |
| FF' | ,00086797030101345360 | .00067399629661650399 | .00023640225161570094 | .000426887237939010605 |
| GF' | ,00245985317786788203 | ,00191012518535192702 | ,00066997088404179292 | ,001209810897457471430 |
| FG' | ,00475500045003346903 | ,00167106097196772757 | ,00167106097196772757 | ,001725810768539315865 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1 / -2 | -1 / 1 | -1 / -2 |
| γ | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 |
| γ' | .77855827391488270790 | 1.8989873580098740436 | .77855827391488270790 | 1.8989873580098740436 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.8860319583267313808 | 2 | 2.8485492966876193473 | 2.9661380136500304269 |
| ε | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 | .77855827391488270790 |
| ε' | .94301597916336569039 | .94949367900493702180 | .97542923941877209170 | .97736091330506801737 |
| -E | 4158.4243308037675343 | 4158.4243308037675343 | 4158.4243308037675343 | 4158.4243308037675343 |
| -E _n | 3698 | 3698 | 3698 | 3698 |
| -E' | 1070.0952476454476540 | 948.45139530986777562 | 461.41100159261854650 | 425.13635801047970331 |
| E _n ' | 1849/2 = 924,5 | 1849/2 | 3698/9 \cong 410,888.. | 3698/9 |

Таблица 1-101. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$
для серии Лаймана, $Z = 101$

| States | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|-------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,01277491289069171 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,00511573507542897 |
| dmD | ,018660368317436529999 | ,01533235678291326655 | ,00571135579813434767 | ,0069575133128569673 |
| GG' | .010730887813211611820 | .00894137875164227124 | .00346557717977487915 | .00374287246660792746 |
| FF' | .000980544378520318782 | .00075099805274516061 | .00022042868878502238 | .00047912255042521743 |
| GF' | ,002229551761246537352 | ,00170761167762484523 | ,00050120849405259994 | ,00108942394607929585 |
| FG' | ,004719384364458062045 | ,00393236830090098947 | ,00152414143552184620 | ,00164609434974452656 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1/-2 | -1/1 | -1/-2 |
| γ | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 |
| γ' | .67585718753009893155 | 1.8592425710315734148 | .67585718753009893155 | 1.8592425710315734148 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.8307687934472222326 | 2 | 2.7755051342269925130 | 2.9527081030916596226 |
| ε | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 | .67585718753009893155 |
| ε' | .91538439672361111629 | .92962128551578670739 | .96409736538835602379 | .96834582735685173880 |
| -E | 6087.0341911618210455 | 6087.0341911618210455 | 6087.0341911618210455 | 6087.0341911618210455 |
| -E _n | 10201/2 = 5100,5 | 5100,5 | 5100,5 | 5100,5 |
| -E' | 1588.9850104172527182 | 1321.6323944718093109 | 674.21073683119138912 | 594.42944208326171109 |
| -E _n ' | 10201/8 = 1275,125 | 10201/8 | 10201/18 \cong 566,7222... | 10201/18 |

Таблица 1-118. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Лаймана, $Z=118$

| Состояния | $1s - 2p \frac{1}{2}$ | $1s - 2p \frac{3}{2}$ | $1s - 3p \frac{1}{2}$ | $1s - 3p \frac{3}{2}$ |
|------------------|-------------------------------|-----------------------|-------------------------------|-----------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{15}/3^9} Z^2 \cong$ | 0,01093445933864290 | $\sqrt{3^7/2^{13}} Z^2 \cong$ | 0,00437872239507056 |
| dmD | ,01548310958005248412 | ,01179987443062507152 | ,00373829249177033323 | ,00554881667081505707 |
| GG' | .00800519762156500802 | .00612562072632990891 | .00213586799699072541 | .00263797213454478140 |
| FF' | .00105684267158972378 | .00079130038279544177 | .00013924876702683046 | .00051056840799165331 |
| GF' | ,00185138113636921714 | ,00138620311356802187 | ,00024393653612448676 | ,00089441573925089080 |
| FG' | ,00456968815052853518 | ,00349675020793169896 | ,00121923919162829060 | ,00150586038902773155 |
| 8/8' | -1 / 1 | -1/-2 | -1/1 | -1/-2 |
| γ | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 |
| γ' | .50845663239550418996 | 1.8051393705271005697 | .50845663239550418996 | 1.8051393705271005697 |
| N | 1 | 1 | 1 | 1 |
| N' | 1.7369263843902562988 | 2 | 2.6521362200275491807 | 2.9343276471883982744 |
| ε | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 | .50845663239550418996 |
| ε' | .86846319219512814940 | .90256968526355028485 | .94582495931127077902 | .95597346574944253946 |
| -E | 9230.6266557282426940 | 9230.6266557282426940 | 9230.6266557282426940 | 9230.6266557282426940 |
| -E _n | 6962 | 6962 | 6962 | 6962 |
| -E' | 2470.1119867616492849 | 1829.6307499074864606 | 1017.3457880097175975 | 826.76835330533539747 |
| -E _{n'} | 1740,5 | 1740,5 | 6962/9 \cong 773,5555 .. | 6962/9 |

Таблица 2-1. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 1$

| $nlj - n'l'j'$ | $2s - 3p \frac{1}{2}$ | $2s - 3p \frac{3}{2}$ | $2p \frac{1}{2} - 3s$ | $2p \frac{3}{2} - 3s$ | $2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$ |
|------------------|------------------------------------|-----------------------|------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} \cong$ | 3,064815406570516442 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} \cong$ | 0,9384042377397919 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}}$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} \cong$ | 4,7479916115390094 |
| dmD | 3,075202304060882424 | 3,067788877331386055 | ,93281574716243788 | ,93752844503783334 | 4,7524048015053487 | 4,7628980624679973 | 4,7624019315609641 |
| GG' | 3.064789042818005441 | 3.064681674432524634 | .93839859459986130 | .93848426373630621 | 4.7478594081831539 | 4.7479689080247616 | 4.7479549007130696 |
| FF' | .0000073668963246701 | .0000022652183195089 | .00000225558892948 | -.0000048583721109 | .00000175571186594 | .00001141275459902 | .00001053484344343 |
| GF' | ,0048146528436505733 | -,002485053444360266 | -,0031598393257010 | -,0026630786544634 | ,00625575593843026 | ,00625581212540508 | ,00577459199537740 |
| FG' | ,0055912415029017388 | ,0055911231619088719 | -,0024252637006519 | ,00171211832810146 | -,0017121183281014 | ,00866192956323152 | ,00866190400907361 |
| κ/κ' | -1 / 1 | -1 / -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | .9999733739685316401 | .9999733739685316401 | .99997337396853164 | 1.9999866871171939 | .99997337396853164 | 1.9999866871171939 | 1.9999866871171939 |
| γ' | .9999733739685316401 | 1.999986687117193995 | .99997337396853164 | .99997337396853164 | 1.9999866871171939 | 1.9999866871171939 | 2.9999911247612064 |
| N | 1.999986686939956428 | 1.999986686939956428 | 1.9999866869399564 | 2 | 1.9999866869399564 | 2 | 2 |
| N' | 2.999982249259839630 | 2.999995562369115904 | 2.9999822492598396 | 2.9999822492598396 | 2.9999955623691159 | 2.9999955623691159 | 3 |
| ε | .9999933434699782140 | .9999933434699782140 | .99999334346997821 | .99999334355859699 | .99999334346997821 | .99999334355859699 | .99999334355859699 |
| ε' | .9999970415520591229 | .9999970415783165694 | .99999704155205912 | .99999704155205912 | .99999704157831656 | .99999704157831656 | .99999704158706883 |
| -E | .1250020801891715163 | .1250020801891715163 | .12500208018917151 | .12500041602897242 | .12500208018917151 | .12500041602897242 | .12500041602897242 |
| $-E_n$ | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 | 1/8 |
| $-E'$ | .05555629517641473 | .055558020913644617 | .05555629517641473 | .05555629517641473 | .0555580209136446 | .0555580209136446 | .0555563773381420 |
| $-E_{n'}$ | 1/18 \cong 0,0555 .. | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 | 1/18 |

Таблица 2-2. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 2$

| $nlj - n'l'j'$ | $2s - 3p \frac{1}{2}$ | $2s - 3p \frac{3}{2}$ | $2p \frac{1}{2} - 3s$ | $2p \frac{3}{2} - 3s$ | $2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$ |
|----------------|--|-----------------------|--|-----------------------|-----------------------------------|--|-----------------------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 1,53240770328525822 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,46920211886989598 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 2,37399580576950472 |
| dmD | 1,539008061062850795 | 1,53919938164826192 | ,464107210854346582 | ,468401899650660108 | 2,37854670171058609 | 2,38889082219236527 | 2,38837972644079167 |
| GG' | 1.532354972214862711 | 1.53214023265876509 | .469190831003345915 | .469362180225481619 | 2.37373139157786203 | 2.37395039787989273 | 2.37392238369093994 |
| FF' | 0.000014733662015508 | .000002265218319508 | .000004510818678697 | -.00000971705401185 | .000003510820639659 | .000022825354147712 | .000021069502028994 |
| GF' | ,0010471680314290524 | ,001466170012009063 | -,00266293437066068 | -,00266313696771292 | ,006255482398646363 | ,006255707167807241 | ,005774483673372319 |
| FG' | ,0055911871545435233 | ,005590713759168271 | -,00242519659701735 | ,001712573446903261 | -,00144368308656196 | ,008661891790517589 | ,008661789574450428 |
| $8/8'$ | -1/1 | -1/-2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | .9998934916200001589 | .999893491620000158 | .999893491620000158 | 1.99994674793706328 | .999893491620000158 | 1.99994674793706328 | 1.99994674793706328 |
| γ' | .9998934916200001589 | 1.99994674793706328 | .999893491620000158 | .999893491620000158 | 1.99994674793706328 | 1.99994674793706328 | 2.99996449888728438 |
| N | 1.999946745100979012 | 1.99994674510097901 | 1.99994674510097901 | 2 | 1.99994674510097901 | 2 | 2 |
| N' | 2.999928993573014660 | 2.99998224925983963 | 2.99992899357301466 | 2.99992899357301466 | 2.99998224925983963 | 2.99998224925983963 | 3 |
| ε | .9999733725504895060 | .999973372550489506 | .999973372550489506 | .999973373968531640 | .999973372550489506 | .999973373968531640 | .999973373968531640 |
| ε' | .9999881657355588881 | .999988166155721384 | .999988165735558888 | .999988165735558888 | .999988166155721384 | .999988166155721384 | .999988166295761462 |
| -E | .5000332858186157676 | .500033285818615767 | .500033285818615767 | .500006656596486407 | .500033285818615767 | .500006656596486407 | .500006656596486407 |
| $-E_n$ | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/2 |
| $-E'$ | .2222340570546730697 | .500006656596486407 | .222234057054673069 | .222234057054673069 | .222226166879772170 | .222226166879772170 | .22223537086028649 |

Таблица 2-10. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 10$

| $-E_{n'}$ | 2/9 | 2/9 | 2/9 | 2/9 | 2/9 | 2/9 | 2/9 |
|------------------|--|----------------------|--|--------------------|----------------------------------|--|---------------------|
| $nlj - n'l'j'$ | 2s - 3p 1/2 | 2s - 3p 3/2 | 2p 1/2 - 3s p30 | 2p 3/2 - 3s | 2p 1/2 - 3d 3/2 | 2p 3/2 - 3d 3/2 | 2p 3/2 - 3d 5/2 |
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,306481540657051644 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0938404237739791 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,4747991611539009 |
| dmD | ,3166908000739805143 | ,3082419740694586702 | ,08872324858612972 | ,09365577883027818 | ,47829575303599589 | ,48959911410176725 | ,488966442656745849 |
| GG' | ,3062173133873350292 | ,3051431694829934258 | ,09378372993474895 | ,09464223220517242 | ,47347589048633990 | ,47457198385626169 | ,474431982447947187 |
| FF' | ,0000736473920203653 | ,0000111426288658104 | ,00002249653466497 | -,0000486345870631 | ,00001745746677815 | ,00011410194264051 | ,000105317912146276 |
| GF' | ,0048103946878576438 | -,002489922573360591 | -,0026599329663682 | -,0026649881497287 | ,00624671092571554 | ,00625234721543503 | ,005771016158925369 |
| FG' | ,0055894446067674768 | ,0055775845309600249 | -,0024230449169160 | ,00172716936189759 | -,0014443058428377 | ,00866068108743001 | ,008658126137727017 |
| κ/κ' | -1 / 1 | -1 / -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,9973338781977092754 | ,9973338781977092754 | ,99733387819770927 | 1,9986682727758709 | ,99733387819770927 | 1,9986682727758709 | 1,99866827277587092 |
| γ' | ,9973338781977092754 | 1,998668272775870928 | ,99733387819770927 | ,99733387819770927 | 1,9986682727758709 | 1,9986682727758709 | 2,99911234611190969 |
| N | 1,998666494539651442 | 1,998666494539651442 | 1,9986664945396514 | 2 | 1,9986664945396514 | 2 | 2 |
| N' | 2,998222058619213931 | 2,999556058077885274 | 2,9982220586192139 | 2,9982220586192139 | 2,9995560580778852 | 2,9995560580778852 | 3 |
| ε | ,9993332472698257214 | ,9993332472698257214 | ,99933324726982572 | ,99933413638793546 | ,99933324726982572 | ,99933413638793546 | ,999334136387935464 |
| ε' | ,9997037642962597325 | ,9997040277678346713 | ,99970376429625973 | ,99970376429625973 | ,99970402776783467 | 2,9995560580778852 | ,999704115370636564 |
| $-E$ | 12,52085966273952215 | 12,52085966273952215 | 12,520859662739522 | 12,504163033581692 | 12,520859662739522 | 12,504163033581692 | 12,5041630335816923 |
| $-E_n$ | 25/2 | 25/2 | 25/2 | 25/2 | 25/2 | 25/2 | 25/2 |
| $-E'$ | 5,562970357324616746 | 5,558022660126484693 | 5,5629703573246167 | 5,5629703573246167 | 5,5580226601264846 | 5,5580226601264846 | 5,55637757891582591 |
| $-E_{n'}$ | 50/9 \cong 5,555 .. | 50/9 | 50/9 | 50/9 | 50/9 | 50/9 | 50/9 |

Таблица 2-18. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 18$

| $nlj - n'l'j'$ | 2s - 3p 1/2 | 2s - 3p 3/2 | 2p 1/2 - 3s | 2p 3/2 - 3s | 2p 1/2 - 3d 3/2 | 2p 3/2 - 3d 3/2 | 2p 3/2 - 3d 5/2 |
|----------------|--|---------------------|--|--------------------|----------------------------------|--|--------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,17026752258725091 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0521335687633217 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,2637773117521671 |
| dmD | ,1803080278859917692 | ,170919218077867094 | ,046999811704987550 | ,05258771140385718 | ,26620172856067269 | ,27847543023630822 | ,27771803292965420 |
| GG' | ,1697894914412438324 | ,167854151868351373 | ,052030442195205542 | ,05358318084440806 | ,26139034572666672 | ,26336781268280613 | ,26311610257436396 |
| FF' | ,0001324772232707070 | ,000019281074999132 | ,000040250785168528 | -,0000877459496613 | ,00003101563195003 | ,00020527894598720 | ,00018944764802616 |
| GF' | ,004800706421587727 | -,00250094888434647 | -,00265289015732884 | -,0026691941297716 | ,00622610560696133 | ,00624449743503113 | ,00576291614555451 |
| FG' | ,0055853527998895027 | ,005546734018863059 | -,00241799111805768 | ,00176147063888208 | -,0014457384049054 | ,00865784117248376 | ,00864956656170956 |
| 8/8' | -1/1 | -1/-2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,9913357460047839769 | ,991335746004783976 | ,991335746004783976 | 1,9956819790003770 | ,99133574600478397 | 1,9956819790003770 | 1,9956819790003770 |
| γ' | ,9913357460047839769 | 1,99568197900037709 | ,991335746004783976 | ,99133574600478397 | 1,9956819790003770 | 1,9956819790003770 | 2,9971230474084412 |
| N | 1,995663170980906776 | 1,99566317098090677 | 1,99566317098090677 | 2 | 1,9956631709809067 | 2 | 2 |
| N' | 2,994218259248837041 | 2,99856031421760035 | 2,99421825924883704 | 2,9942182592488370 | 2,9985603142176003 | 2,9985603142176003 | 3 |
| ε | ,9978315854904533880 | ,997831585490453388 | ,997831585490453388 | ,99784098950018854 | ,99783158549045338 | ,99784098950018854 | ,99784098950018854 |
| ε' | ,9990373069046822912 | ,999040094273383228 | ,999037306904682291 | ,99903730690468229 | ,99904009427338322 | ,99904009427338322 | ,99904101580281374 |
| $-E$ | 40,72036384100683136 | 40,7203638410068313 | 40,7203638410068313 | 40,543767209553668 | 40,720363841006831 | 40,543767209553668 | 40,543767209553668 |
| $-E_n$ | 81/2 | 81/2 | 81/2 | 81/2 | 81/2 | 81/2 | 81/2 |
| $-E'$ | 18,07828389635644381 | 18,0259402751707909 | 18,0782838963564438 | 18,078283896356443 | 18,025940275170790 | 18,025940275170790 | 18,008634998188078 |
| $-E_{n'}$ | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 | 18 |

Таблица 2-36. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=36$

| $n'l_j - n'l'_j$ | $2s - 3p \frac{1}{2}$ | $2s - 3p \frac{3}{2}$ | $2p \frac{1}{2} - 3s$ | $2p \frac{3}{2} - 3s$ | $2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$ |
|------------------|--|-----------------------|--|-----------------------|-----------------------------------|--|-----------------------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,085133761293625456 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0260667843816608 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,1318886558760835 |
| dmD | ,09474511973571658030 | ,08316075331915397513 | ,02091206733825499 | ,02807462514822950 | ,1318104804460475 | ,14632978148868942 | ,14528138097998629 |
| GG' | ,08415600104150903792 | ,08026877914013821952 | ,02585088296336067 | ,02902286440614671 | ,12706929362108408 | ,13106459313754210 | ,13056372296316133 |
| FF' | ,00026418259808757152 | ,00003165937875115645 | ,00007835156189131 | -,0001771409191410 | ,00005842767785362 | ,00040964161177557 | ,00037780475003630 |
| GF' | ,00475777291854752787 | -,0025489242503299936 | -,0026216649338617 | -,0026855024382670 | ,00613435925017619 | ,00621027345106491 | ,00572761834098556 |
| FG' | ,00556716317757244298 | ,00540923905059459275 | -,0023955022531353 | ,00191440409949085 | -,0014516001030664 | ,00864527328830684 | ,00861223492580310 |
| κ/κ' | -1 / 1 | -1 / -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,96487628493369360172 | ,96487628493369360172 | ,96487628493369360 | 1,9826714920095679 | ,96487628493369360 | 1,9826714920095679 | 1,9826714920095679 |
| γ' | ,96487628493369360172 | 1,9826714920095679538 | ,96487628493369360 | ,96487628493369360 | 1,9826714920095679 | 1,9826714920095679 | 2,9884755721316254 |
| N | 1,9823603531818797963 | 1,9823603531818797963 | 1,9823603531818797 | 2 | 1,9823603531818797 | 2 | 2 |
| N' | 2,9764920862879468450 | 2,9942182592488370415 | 2,9764920862879468 | 2,9764920862879468 | 2,9942182592488370 | 2,9942182592488370 | 3 |
| ε | ,99118017659093989815 | ,99118017659093989815 | ,99118017659093989 | ,99133574600478397 | ,99118017659093989 | ,99133574600478397 | ,99133574600478397 |
| ε' | ,99609748622959062463 | ,99614364543947245902 | ,99609748622959062 | ,99609748622959062 | ,99614364543947245 | ,99614364543947245 | ,99615852404387516 |
| $-E$ | 165,62627516518949838 | 165,62627516518949838 | 165,62627516518949 | 162,70485810845361 | 165,62627516518949 | 162,70485810845361 | 162,70485810845361 |
| $-E_n$ | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 |
| $-E'$ | 73,284780158953838855 | 72,417962577386051303 | 73,284780158953838 | 73,284780158953838 | 72,417962577386051 | 72,417962577386051 | 72,138559270473505 |
| $-E_n'$ | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 | 72 |

Таблица 2-54. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=54$

| $n'l_j - n'l'_j$ | $2s - 3p \frac{1}{2}$ | $2s - 3p \frac{3}{2}$ | $2p \frac{1}{2} - 3s$ | $2p \frac{3}{2} - 3s$ | $2p \frac{1}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{3}{2}$ | $2p \frac{3}{2} - 3d \frac{5}{2}$ |
|------------------|--|-----------------------|--|-----------------------|-----------------------------------|--|-----------------------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,05675584086241697 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,01737785625444059 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,0879257705840557 |
| dmD | ,065843069705282846 | ,051923445072615573 | ,012217182090642088 | ,021175478115975704 | ,08516572795066560 | ,10206502741660971 | ,10071346355929142 |
| GG' | ,055230897741186297 | ,049357498280291309 | ,017028114281532840 | ,021964129036705097 | ,08057510258680235 | ,08667684020994287 | ,08593197717353412 |
| FF' | ,000394303305114211 | ,000029236462432209 | ,000111910218554438 | -,00026909425695473 | ,00007826313776033 | ,00061212234883918 | ,00056392949879688 |
| GF' | ,004682717276809484 | -,00262916101370225 | -,00256701889863584 | -,00270475394822958 | ,00597225956266542 | ,00615264093168988 | ,00566823891247368 |
| FG' | ,005535151382172854 | ,005165871343594305 | -,00235582351080935 | ,002185197284454919 | -,0014598973365625 | ,00862342392613777 | ,00854931797448673 |
| $8/8'$ | -1/1 | -1/-2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,919085987142527451 | ,919085987142527451 | ,919085987142527451 | 1,96079551502999775 | ,91908598714252745 | 1,9607955150299977 | 1,9607955150299977 |
| γ' | ,919085987142527451 | 1,96079551502999775 | ,919085987142527451 | ,919085987142527451 | 1,9607955150299977 | 1,9607955150299977 | 2,9740072380143519 |
| N | 1,95912530846933190 | 1,95912530846933190 | 1,95912530846933190 | 2 | 1,9591253084693319 | 2 | 2 |
| N' | 2,945563434823665183 | 1,96079551502999775 | 2,94556343482365183 | 2,94556343482365183 | 2,9869032508703718 | 2,9869032508703718 | 3 |
| ε | ,979562654234665954 | ,979562654234665954 | ,979562654234665954 | ,980397757514998875 | ,97956265423466595 | ,98039775751499887 | ,98039775751499887 |
| ε' | ,991011075379298506 | ,991259262973192584 | ,991011075379298506 | ,991011075379298506 | ,99125926297319258 | ,99125926297319258 | ,99133574600478397 |
| $-E$ | 383,790161818677581 | 383,790161818677581 | 383,790161818677581 | 368,107869862844356 | 383,79016181867758 | 368,10786986284435 | 368,10786986284435 |
| $-E_n$ | 729/2 = 364,5 | 729/2 | 729/2 | 729/2 | 729/2 | 729/2 | 729/2 |
| $-E'$ | 168,801804029102288 | 164,141122651212039 | 168,801804029102288 | 168,801804029102288 | 164,14112265121203 | 164,14112265121203 | 162,70485810845361 |

| $-E_{n'}$ | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 | 162 |
|---|--|-----------------------|--|--------------------|----------------------------------|--|---------------------|
| Таблица 2-86. Дипольные моменты $\langle G r G' \rangle$, $\langle F r F' \rangle$, $\langle G r F' \rangle$, $\langle F r G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z=86$ | | | | | | | |
| $n'l_j - n'l'_j$ | $2s - 3p\ 1/2$ | $2s - 3p\ 3/2$ | $2p\ 1/2 - 3s$ | $2p\ 3/2 - 3s$ | $2p\ 1/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 5/2$ |
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0356373884484943772 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0109116771830208 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,0552092047853373 |
| dmD | ,04339400581814768170 | ,03052069485546874867 | ,00574432716374939295 | ,01896412035837617 | ,04691550198008891 | ,06867178194256122 | ,06676069330155377 |
| GG' | ,03289598770111691275 | ,02334256453139369298 | ,01021627868791718722 | ,01902036446439304 | ,04285790622850658 | ,05316172428480578 | ,05200455791798453 |
| FF' | ,00061885109963282943 | -.0000463893911267304 | ,00015034478890030703 | -.0004322475898374 | ,00007885813058173 | ,00096401614555692 | ,00088531347892735 |
| GF' | ,00444636458109612944 | ,00284801528445399648 | -,0023944510511310021 | -,0026854720012314 | ,00544760507392509 | ,00598924882057022 | ,00550028413314312 |
| FG' | ,00543280243630181008 | ,00437650443074778967 | -,0022278452619370992 | ,00306147548505197 | -,0014688674529245 | ,00855679269162829 | ,00837053777149877 |
| κ/κ' | -1 / 1 | -1 / -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,77855827391488270790 | ,77855827391488270790 | ,77855827391488270790 | 1,8989873580098740 | ,77855827391488270 | 1,8989873580098740 | 1,8989873580098740 |
| γ' | ,77855827391488270790 | 1,8989873580098740436 | ,77855827391488270790 | ,77855827391488270 | 1,8989873580098740 | 1,8989873580098740 | 2,9336245475318278 |
| N | 1,8860319583267313808 | 1,8860319583267313808 | 1,8860319583267313808 | 2 | 1,8860319583267313 | 2 | 2 |
| N' | 2,8485492966876193473 | 2,9661380136500304269 | 2,8485492966876193473 | 2,8485492966876193 | 2,9661380136500304 | 2,9661380136500304 | 3 |
| ε | ,94301597916336569039 | ,94301597916336569039 | ,94301597916336569039 | ,94949367900493702 | ,94301597916336569 | ,94949367900493702 | ,94949367900493702 |
| ε' | ,97542923941877209170 | ,97736091330506801737 | ,97542923941877209170 | ,97542923941877209 | ,97736091330506801 | ,97736091330506801 | ,97787484917727594 |
| $-E$ | 1070,0952476454476540 | 1070,0952476454476540 | 1070,0952476454476540 | 948,45139530986777 | 1070,0952476454476 | 948,45139530986777 | 948,45139530986777 |
| $-E_n$ | 1849/2 = 924,5 | 1849/2 | 1849/2 | 1849/2 | 1849/2 | 1849/2 | 1849/2 |
| $-E'$ | 461,41100159261854650 | 425,13635801047970331 | 461,41100159261854650 | 461,41100159261854 | 425,13635801047970 | 425,13635801047970 | ,05555563773381420 |
| $-E_{n'}$ | 3698/9 \cong 410,888.. | 3698/9 | 3698/9 | 3698/9 | 3698/9 | 3698/9 | 3698/9 |

| $n'l_j - n'l'_j$ | $2s - 3p\ 1/2$ | $2s - 3p\ 3/2$ | $2p\ 1/2 - 3s$ | $2p\ 3/2 - 3s$ | $2p\ 1/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 5/2$ |
|---|--|---------------------|--|---------------------|----------------------------------|--|---------------------|
| Таблица 2-101. Дипольные моменты $\langle G r G' \rangle$, $\langle F r F' \rangle$, $\langle G r F' \rangle$, $\langle F r G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 101$ | | | | | | | |
| dmS | $\sqrt{2^{20} 3^7 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,03034470699574768 | $\sqrt{2^{15} 3^8 / 5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,009291131066730 | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2$ | $\sqrt{2^{22} 3^8 / 5^{13}} Z^2 \cong$ | 0,047009817936029 |
| dmD | ,037061247167514401 | ,016186482889722901 | ,004098770481163448 | ,020298384669516771 | ,035547632900928395 | ,059918339416953273 | ,057755748288703303 |
| GG' | ,026820265982548721 | ,015445954219074916 | ,008340145649362399 | ,019577950317564181 | ,031888334645969976 | ,044560447987520108 | ,043223515944959931 |
| FF' | ,000618851099632829 | -.00004638939112673 | ,000152207582063676 | -.00043224758983743 | ,000078858130581735 | ,000964016145556929 | ,005392153841909376 |
| GF' | ,004267850874073442 | -,00297420469029286 | -,00226361040999422 | -,00258628690348914 | ,005037598083702676 | ,005883784898799101 | ,005392153841909376 |
| FG' | ,005354279211259408 | ,003761122752067583 | -,00212810954710503 | ,003738968845279173 | -,00145715795932599 | ,008510090385077132 | ,008254765022906642 |
| $8/8'$ | -1/1 | -1/ -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,675857187530098931 | ,675857187530098931 | ,675857187530098931 | 1,85924257103157341 | ,675857187530098931 | 1,85924257103157341 | 1,85924257103157341 |
| γ' | ,675857187530098931 | 1,85924257103157341 | ,675857187530098931 | ,675857187530098931 | 1,85924257103157341 | 1,85924257103157341 | 2,90805483750497650 |
| N | 1,83076879344722223 | 1,83076879344722223 | 1,83076879344722223 | 2 | 1,83076879344722223 | 2 | 2 |
| N' | 2,77550513422699251 | 2,95270810309165962 | 2,77550513422699251 | 2,77550513422699251 | 2,95270810309165962 | 2,95270810309165962 | 3 |
| ε | ,915384396723611116 | ,915384396723611116 | ,915384396723611116 | ,929621285515786707 | ,915384396723611116 | ,929621285515786707 | ,929621285515786707 |
| ε' | ,964097365388356023 | ,968345827356851738 | ,964097365388356023 | ,964097365388356023 | ,968345827356851738 | ,968345827356851738 | ,969351612501658835 |
| $-E$ | 1588,98501041725271 | 1588,98501041725271 | 1588,98501041725271 | 1321,63239447180931 | 1588,98501041725271 | 1321,63239447180931 | 1321,63239447180931 |
| $-E_n$ | 10201/ 8 = 1275,125 | 10201/ 8 | 10201/ 8 | 10201/ 8 | 10201/ 8 | 10201/ 8 | 10201/ 8 |
| $-E'$ | 674,210736831191389 | 594,429442083261711 | 674,210736831191389 | 674,210736831191389 | 594,429442083261711 | 594,429442083261711 | 575,541938396990910 |
| $-E_{n'}$ | 10201/18 \cong 566,722 .. | 10201/ 18 | 10201/18 | 10201/18 | 10201/18 | 10201/18 | 10201/18 |

Таблица 2-118. Дипольные моменты $\langle G | r | G' \rangle$, $\langle F | r | F' \rangle$, $\langle G | r | F' \rangle$, $\langle F | r | G' \rangle$ для серии Бальмера, $Z = 118$

| $n'l_j - n'l'_j$ | $2s - 3p\ 1/2$ | $2s - 3p\ 3/2$ | $2p\ 1/2 - 3s$ | $2p\ 3/2 - 3s$ | $2p\ 1/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 3/2$ | $2p\ 3/2 - 3d\ 5/2$ |
|------------------|-------------------------------------|---------------------|-------------------------------------|---------------------|-------------------------------|-------------------------------------|---------------------|
| dmS | $\sqrt{2^{20}3^7/5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,02597301192008912 | $\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,00795257828593044 | $\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2$ | $\sqrt{2^{15}3^8/5^{12}} Z^2 \cong$ | 0,0402372170469407 |
| dmD | ,031193573774357459 | ,006940031115734785 | ,002680214197342999 | ,023728775136772542 | ,024159795277043315 | ,052783709563086565 | ,050304498628545601 |
| GG' | ,021177218656629865 | ,007656205600536609 | ,006544311109297307 | ,021591729769877403 | ,021242311865134314 | ,037303424951513304 | ,035776677854889230 |
| FF' | ,000829807051096920 | -,00032016373690940 | ,000130766162140875 | -,00050730382516033 | -,00000614256807583 | ,001298889290765293 | ,001186881901849550 |
| GF' | ,003966264239355270 | -,00309709497127059 | -,00204146105054958 | -,00224177163904206 | ,004322172151709452 | ,005739781625681225 | ,005244821849347770 |
| FG' | ,005220283827275402 | ,002701084223378176 | -,00195340202354560 | ,004886120831097539 | -,00139854617172462 | ,008441613695126741 | ,008096117022459050 |
| 8/8' | -1/1 | -1/ -2 | 1 / -1 | -2 / -1 | 1 / 2 | -2 / 2 | -2 / -3 |
| γ | ,508456632395504189 | ,508456632395504189 | ,508456632395504189 | 1.80513937052710056 | ,508456632395504189 | 1.80513937052710056 | 1.80513937052710056 |
| γ' | ,508456632395504189 | 1.80513937052710056 | ,508456632395504189 | ,508456632395504189 | 1.80513937052710056 | 1.80513937052710056 | 2.87376549965841452 |
| N | 1.73692638439025629 | 1.73692638439025629 | 1.73692638439025629 | 2 | 1.73692638439025629 | 2 | 2 |
| N' | 2.65213622002754918 | 2.93432764718839827 | 2.65213622002754918 | 2.65213622002754918 | 2.93432764718839827 | 2.93432764718839827 | 3 |
| ε | ,868463192195128149 | ,868463192195128149 | ,868463192195128149 | ,902569685263550284 | ,868463192195128149 | ,902569685263550284 | ,902569685263550284 |
| ε' | ,945824959311270779 | ,955973465749442539 | ,945824959311270779 | ,945824959311270779 | ,955973465749442539 | ,955973465749442539 | ,957921833219471507 |
| -E | 2470.11198676164928 | 2470.11198676164928 | 2470.11198676164928 | 1829.63074990748646 | 2470.11198676164928 | 1829.63074990748646 | 1829.63074990748646 |
| -E _n | 3481 / 2 = 1740,5 | 3481 / 2 | 3481 / 2 | 3481 / 2 | 3481 / 2 | 3481 / 2 | 3481 / 2 |
| -E' | 1017.34578800971759 | 826.768353305335397 | 1017.34578800971759 | 1017.34578800971759 | 826.768353305335397 | 826.768353305335397 | 790.180223164041435 |
| -E _{n'} | 6962 / 9 \cong 773,555 .. | 6962/9 | 6962/9 | 6962/9 | 6962/9 | 6962/9 | 6962/9 |

ЛИТЕРАТУРА

- 1a C. Schwartz, *Theory of hyperfine structure*, Phys. Rev. **97**, 380-395 (1955);
- 1b C. Schwartz, *Theory of hyperfine structure*, Phys. Rev. **105**, 173-183 (1957).
- 2a. L. Armstrong, Jr., *Group properties of radial wavefunctions*, J. de Phys. C **31**, no.11-12, 4-17 (1970).
- 2b. L. Armstrong, Jr., *Group properties of hydrogenic radial functions*, Phys. Rev. A **3**, no. 5, 1546-1550 (1971).
- 2c. L. Armstrong, Jr., *Theory of the hyperfine structure of free atoms* (Wiley, New York, 1971).
- 3 V. F. Tarasov, *New properties of the P. E. Appell hypergeometric series $F_2(\alpha; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'; x, y)$ to the vicinity of the singular point (1,1) and near the boundary of its domain of convergence $D_2: |x| + |y| < 1$* , Int. J. Modern Phys. B, **24**, n. 22 (2010) 4181-4202.
- 4 H. A. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms* (Plenum PC, New York, 1977).
5. A.I. Akhiezer and V.B. Berestetskii, *Quantum electrodynamics* (M., Nauka, 1969), p. 136
6. V. F. Tarasov, *Radial matrix elements with Dirac's functions in the theory of fine and hyperfine structures of hydrogen-like systems*, Int. J. Modern Phys. B **10**, no.20, 2553-2576 (1996).
7. V. F. Tarasov, *Exact analytical expressions and numerical values of diagonal matrix elements $\langle r^k \rangle_{nlj}$, $\langle g | r^k | g \rangle$, $\langle g | r^k | f \rangle$ and $\langle f | r^k | f \rangle$ with Dirac's radial functions $g(r)$ and $f(r)$ of H-like atoms (as $Z=1$, $n \leq 8$ and $-7 \leq k \leq 4$) and the symmetry of Appell's function $F_2(1,1)$* , Int. J. Modern Phys. B **22** (29), 5175-5205 (2008).
8. P. Appell et J. Kampé de Fériet, *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques, polynômes d'Hermite* (Gauthier-Villars, Paris, 1926).
9. *Higher transcendental functions*, edited by A. Erdélyi (McGraw-Hill, 1953), Vol.1.
10. J. C. Slater, *Quantum Theory of Atomic Structure*, Vols. **1-2** (McGraw-Hill, New York, 1960).
11. E. U. Condon and G. H. Shortley, *The Theory of Atomic Spectra* (Cambridge, London, 1935).
12. I. I. Sobel'man, *An Introduction to the Theory of Atomic Spectra* (Nauka, Moscow, 1977).

БРЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ, РОССИЯ

E-mail address: vf_tarasov@mail.ru

Поступила в редакцию 1-го ноября 2012 г.