

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА ЦРНЕ ГОРЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА ЦРНЕ ГОРЕ

МАТЕМАТИКА ЦРНЕ ГОРЕ

КЊИГА XXVIII

MATHEMATICA MONTISNIGRI

VOLUME XXVIII

CONTENTS

Mathematics

Никола Михалевич. Асимптотика собственных значений оператора типа Штурма-Лиувилля с переменным запаздыванием.....	5
Gleb V. Fedorov. The greatest order of the divisor function with increasing dimension.	17

Mathematical modeling

А.В. Березин, А.А. Крюков, М.Б. Марков, Б.Д. Плющенко. Вычисление электромагнитного поля с заданным волновым фронтом на нерегулярной сетке...	25
С.И. Ткаченко, В.А.Гасилов, А.Ю.Круковский, О.Г.Ольховская, И.П.Цыгвинцев. Вычислительная модель и результаты численного анализа электровзрыва тонких алюминиевых проводников.....	39
A.V. Tolokonnikov. Investigation of the boundary conditions influence on the ground state properties of a two-electron atom in a cavity.....	62
П.Г. Агеев, А.В. Колдоба, И.В. Гасилова, Н.Ю. Повещенко, М.В. Якобовский, С.И. Ткаченко. Комплексная модель отклика пласта на плазменно-импульсное воздействие.....	75

Computer science applications

Dušan S. Jokanović, M. Marina. Zirojević. Using “Wolfram mathematica 9.0” to simulate probability problems.....	99
S. Scepanovic, I. Vukotic. Rip Vs. Eigrp.....	107

КОМПЛЕКСНАЯ МОДЕЛЬ ОТКЛИКА ПЛАСТА НА ПЛАЗМЕННО-ИМПУЛЬСНОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

П.Г. АГЕЕВ^{*}, А.В. КОЛДОБА^{*}, И.В. ГАСИЛОВА^{*}, Н.Ю. ПОВЕЩЕНКО^{*},
М.В. ЯКОВОВСКИЙ^{*}, С.И. ТКАЧЕНКО[†]

^{*} Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия

e-mail: koldoba@rambler.ru, web page: <http://www.keldysh.ru/>

[†] Московский физико-технический институт (государственный университет)
Москва, Россия

e-mail: svtk.mipt@gmail.com, web page: <http://www.mipt.ru/>

Ключевые слова: Лазерное излучение, геометрическая оптика, численный алгоритм

Аннотация. Представлено описание математической модели, разностной схемы и алгоритма расчета поглощения лазерного излучения плазменной мишенью в приближении геометрической оптики. В структуре разработанного алгоритма используется аналитическое решение соответствующих дифференциальных уравнений в предположении постоянного градиента квадрата показателя преломления в газодинамической ячейке. Частично учтены эффекты, не описываемые приближением геометрической оптики, с этой целью используется одномерная модель слоистой среды. Выполнены расчеты модельных задач и получена оценка сходимости предлагаемой численной методики.

COUPLED MODEL OF AN OIL RESERVOIR RESPONSE ON A PULSED PLASMA ACTION

P. AGEEV^{*}, A. KOLDOBA^{*}, I. GASILOVA^{*}, N. POVESHCHENKO^{*},
M. IAKOVOVSKI^{*}, S. TKACHENKO^{*}

^{*} Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia
e-mail: koldoba@rambler.ru, web page: <http://www.keldysh.ru/>

[†] Moscow Institute of Physics and Technology (State University), Moscow, Russia
e-mail: svtk.mipt@gmail.com, web page: <http://www.mipt.ru/>

Summary. The paper deals with a mathematical model, difference scheme and algorithm designed for simulation of laser radiation absorption by a plasma target. The technique is based on geometrical optics approximations to electromagnetic field (Maxwell) system. An analytical solution of the differential equations assuming a constant gradient of the square of optical coefficient in the cell is obtained. It is used in the developed numerical algorithm. For a partial

2010 Mathematics Subject Classification: 93A30.

Key words and Phrases: Laser radiation, geometrical optic, numerical algorithms.

accounting of effects that are beyond the geometrical optics approximation, a one-dimensional model of the layered medium is used. With the aim to study the algorithm experimentally we have calculated some model problems and the results are presented here. Test studies allow to estimate a convergence rate of the proposed technique.

1 ВВЕДЕНИЕ

Технология плазменно-импульсного воздействия (ПИВ) на пласт, содержащий углеводородное сырье, основана на создании посредством электровзрыва импульса давления на находящийся в скважине флюид. Через флюид импульс давления передается к стенкам скважины и далее в пространство коллектора, порождая волну механических напряжений. Натурные измерения и эксперименты фиксируют улучшение коллекторских свойств пласта и повышение его добычных характеристик в результате плазменно-импульсного воздействия¹ в насыщенных пороупругих средах.

В настоящей работе дано описание математической модели, которая может быть использована для численного исследования волновых явлений, порождаемых ПИВ в флюидонасыщенных пороупругих средах, в целях поддержки принятия решений по оптимальным вариантам применения этой технологии. Модель строится при условии малого темпа фильтрации, при котором поддерживается состояние локального термодинамического равновесия системы. Для рассматриваемого класса существенно учесть обратное влияние напряженно-деформированного состояния среды на фильтрационные процессы в ней. Поэтому в качестве опорной нами была принята квазистационарная модель Био, самосогласованно описывающая фильтрацию насыщающих коллектор флюидов и вызываемое полем порового давления напряженно-деформированное состояние вмещающих пород.

В модели Био^{2,3} рассматривается пористое тело (скелет), насыщенное слабосжимаемым флюидом и в каждый момент времени пребывающее в состоянии механического равновесия при фиксированной температуре. Тензор полных напряжений в системе "скелет-флюид" содержит слагаемые, обусловленные как смещением частиц скелета от "ненапряженного", или "отсчетного", состояния, так и давлением насыщающего флюида. Эволюция поля давления флюида изменяет напряженно-деформированное состояние (НДС) скелета, его емкостные и проводящие свойства. Изменение свойств коллектора меняет режим фильтрации флюида, и влияет, в свою очередь, на поле давления. Самосогласованная модель Био является эффективным средством численного анализа процессов в коллекторах, что продемонстрировано, например, в работе⁴. Отметим, что описание механики системы "флюид в пористой среде" в модели Био построено по традиционной концепции "взаимопроникающих континуумов"⁵.

Адаптация модели Био для анализа ПИВ заключается в задании плотности энергии скелета и насыщающего его флюида в зависимости от деформаций скелета и параметров, характеризующих его внутреннюю структуру (пористость, упругие модули и пр.). В рамках используемой нами теории эта зависимость носит квадратичный характер. Связь между феноменологическими модулями упругости, входящими в модель, и измеримыми величинами, такими как модули дренажного и недренажного сжатия, устанавливается рассмотрением специальных режимов фильтрации.

Эволюция поля давления в коллекторе в результате импульса ПИВ описывается уравнением пьезопроводности, которое является следствием баланса количества флюида в

поровом пространстве и уравнений механического равновесия скелета. В нашей модели динамика флюида описывается на основе закона фильтрации Дарси. Упругие смещения скелета определяются из системы уравнений Ламе. Система уравнений этой комплексной модели позволяет рассчитать характеристики воздействия ПИВ и оценить эффективность этой технологии в зависимости от интенсивности и частоты повторения импульсов тока.

2 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПЛАЗМЕННО-ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Импульс давления в скважине создается генератором ПИВ, в разряднике которого протягивается тонкая (диаметром в доли миллиметра) проволока. Под действием мощного электрического разряда материал проволоки плавится и испаряется вместе с адсорбированными на ней веществами а также примыкающим к ней достаточно прогретым тепловой волной слоем флюида. Образующаяся смесь паров весьма быстро переходит в газоплазменное состояние и продолжает нагреваться за счет "джоулева" тепловыделения. Процесс происходит в виде взрыва. На начальном этапе плотность газоплазменной смеси достаточно высокая, порядка 10^{20} см⁻³. Разрядный ток, достигающий 500 кА, разогревает вещество в канале разряда до температуры порядка 10^4 К. Неравномерность нагрева по сечению канала влечет и неравномерность его расширения (внутри канала "бегают" волны давления, отражающиеся от прилежащих слоев флюида), что выражается в "пилообразном" поведении давления во времени (см. рис.1). Высокое давление в канале электроразряда передается окружающему флюиду, и далее - в призабойную зону. Канал разряда расширяется. Пока величина тока достаточно высокая, давление в канале растет, несмотря на разлет продуктов взрыва. Канал некоторое время расширяется и по окончании тепловыделения, сначала за счет разницы давлений в канале и окружающем флюиде, а затем по инерции, пока флюид не затормозится.

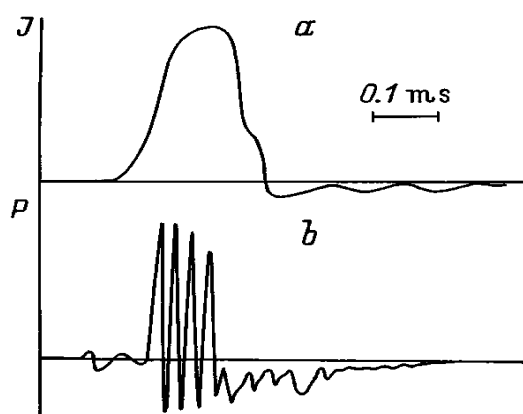


Рис. 1: а - осциллограмма тока разряда, б - осциллограмма давления, максимум давления равен 10^8 Pa

Расширение канала останавливается, когда кинетическая энергия разлетающихся продуктов переходит в их потенциальную энергию, обусловленную падением давления в расширившемся "газовом пузыре" относительно давления в окружающей жидкости. Далее жидкость движется в обратном направлении и сжимает газовый пузырь, пока растущее давление в пузыре не воспрепятствует сжатию. Инерционность сжатия создает запас

потенциальной энергии газа, а возникающий градиент давления снова ведет к расширению канала. Последовательность пульсаций "нагрузка – разгрузка" флюида повторяется пока газ не остынет в силу диссипации энергии, и волновые процессы в нем не затухнут. Возможной причиной прекращения пульсаций может стать также развивающиеся вследствие гидродинамической неустойчивости сжатия неоднородности формы газового пузыря. есс прекращается.

Пульсации давления ПИВ распространяются в виде волн сжатия-разрежения через перфорацию в пласт. Заданное количество импульсов повторяется в одной точке через равные промежутки времени. Циклы нагрузки-разгрузки очищают перфорацию, удаляя кольянт. Волны сжатия-разрежения в пласте вызывают эффект акустической кавитации, в результате чего очищаются природные трещины и капилляры, а также развивается микротрещиноватость, что повышает проницаемость призабойной зоны.

Вся операция происходит за один спуск-подъем. Металлический проводник восстанавливается автоматически без подъема оборудования. За один спуск-подъем генератор ПИВ может сделать до 1000 импульсов.

3 СТРУКТУРА КОМПЛЕКСНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПИВ

Приведенные в разделах 1 и 2 материалы говорят о том, что полноценная модель модель ПИВ должна быть многопараметрической. Она должна показывать развертывание "запускаемых" в результате ПИВ пластовых процессов во времени и в пространстве. Другими словами, математическая модель исследуемой системы включает в себя уравнения и системы дифференциальных уравнений в частных производных, в совокупности описывающих волновое преобразование энергии в разрядном контуре, гидродинамические явления в жидкости и динамику деформируемого твердого тела.

Общая структура предлагаемой в настоящей работе математической модели представлена на рис. 2, стрелками обозначены входные и выходные параметры для каждого моделирующего блока:

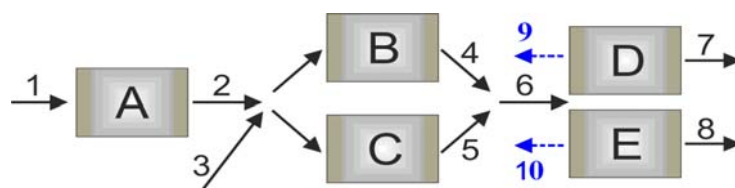


Рис. 2: компоненты модели (моделирующие блоки)

Рассмотрим компоненты общей модели, их связи, входные данные и результаты.

Модель А реализует модель электровзрыва проводника (проволочки) в окружающей слабосжимаемой среде. На входе задаются электрофизические параметры внешней (по отношению к проволочке) цепи – сопротивление подводящих элементов, емкость, индуктивность, размеры и материал проволочки, размеры и форма расчетной области (разрядник в скважине). В этом случае ток определяется через решение электротехнического уравнения для полной цепи, в которой взорванная проволока является элементом с переменными сопротивлением и индуктивностью. Может быть задана модельная или экспериментально измеренная зависимость тока разряда от

времени. Типичные параметры из работы¹ таковы: напряжение питания 220V, напряжение батареи конденсаторов до 6000 вольт, потребляемая мощность 500 Ватт, сила тока в момент разряда до 500 кА. На выходе: результатом расчета по модели А является пространственно-временная зависимость порождаемого электровзрывом импульса давления на границе скважины. Эта зависимость используется в качестве граничного условия для расчета волнового процесса в пласте на основе нестационарной модели Био. Зависимость может быть рассчитана по полуэмпирическим формулам (по опубликованным данным).

Модели В и С представляет собой соответственно квазистационарную «пьезопроводную» модель Био и нестационарную «колебательную» модель Био. Для моделей В и С требуется задание материальных констант пласта и флюидов: проницаемость K , вязкость η , модули упругости насыщенного пористого тела K_u , K_d , K_s - недренажный, дренажный и равномерного всестороннего сжатия с постоянным давлением, равным поровому. Коэффициент сжимаемости флюида K_f . Коэффициенты Ламе μ , λ в тензоре напряжений для насыщенного пористого тела.

Модели В и С реализуют следующие этапы полной методики:

- Расчет давления в порах (p) и напряжения насыщенного пористого тела (τ) на внутренней границе пласта (r), их определение для последующего моделирования в пороупругих моделях Био.

- Расчет «пьезопроводного» влияния ПИВ на пласт. Модель описывает фильтрационный процесс и вызываемое им напряженно-деформированное состояние пористой среды. Флюидонасыщенность удовлетворяет уравнению в частных производных параболического типа. По зависимости коэффициента пьезопроводности χ от материальных констант пласта и флюида, рассчитываются характерные времена процессов, описываемых уравнениями Био.

- Расчет волновых процессов в пласте вследствие передачи импульса давления в результате ПИВ. Рассчитываются собственные колебания пласта и заполняющего поровое пространство флюида с учетом инерции скелета. Рассчитываются волны деформации относительного объема скелета и волны сжатия (давления) флюида в порах.

Полный расчет эффектов ПИВ включает пространственно-временную эволюцию смещений, напряжений, давлений в системе скелет-флюид при воздействии с учетом «пьезопроводного» и «колебательного» проникновения в пласт.

Модель D реализует кинетическую модель газовой выделенности в пласте при ПИВ воздействии, в ней происходит расчет параметров выделяемого газа в рамках кинетического подхода (радиусы кластеров и т.п., обратное влияние на модели Био). Модель E представляет модель рассеянной трещиноватости в пласте при ПИВ воздействии, здесь идет расчет вариаций проницаемости и пористости скелета в рамках модели рассеянной трещиноватости.

Стрелки 9 и 10, исходящие из моделей D и E, соответствуют методу расчета, в котором учитывается обратное влияние на модели Био (В и С) кинетических процессов выделения газа и наведенной рассеянной трещиноватости через изменяющиеся материальные константы пласта (эффективная пористость, проницаемость, модулей упругости и т.п.).

2 МОДЕЛЬ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ЭЛЕКТРОВЗРЫВА ПРОВОЛОЧКИ

Процессы распространения гидродинамических волн в разрядных камерах большинства устройств, использующих электрический разряд или взрыв проволочек в воде или другой конденсированной среде (сейсмоакустические источники, устройства для очистки литья, интенсификации нефтедобычи, обработки кристаллизующегося металла), носят, как правило, трехмерный характер из-за достаточно сложной формы камеры и расположения в ней электродов. Этим обстоятельством определяется необходимость исследования взаимодействия возникающих в жидкости пространственных волн давления с преградами.

Эволюция ударной волны, возникающей при электрическом взрыве проволочки, в упрощенной, но достаточно содержательной постановке, может быть рассмотрена в рамках одномерного приближения, в предположении, что скважина заполнена однородным флюидом.

В этом приближении, как установлено в работе⁶, давление на фронте ударной волны P можно рассчитывать по формуле:

$$P = \frac{2 \cdot 10^2}{\sqrt{r}} \left(\frac{CU_0^2}{L} \right)^{5/16} \omega^{7/16}, \quad (1)$$

где r – положение фронта ударной волны относительно первоначального положения проводника. Параметры, необходимые для расчетов, могут быть получены из осциллограмм: период колебаний разрядного тока ($2\pi/T = \omega = 1/(LC)1/2$), его амплитуда (I_{max}), индуктивность (L), активное сопротивление (R). В работе⁶ отмечается, на основе сопоставления энергетических и гидродинамических характеристик, что варьирование скорости выделения энергии приводит к изменениям параметров, определяющих движение жидкости: скорости расширения канала разряда и давления на фронте ударной волны. Однако увеличение почти в четыре раза скорости выделения энергии на единице длины канала в условиях согласованного режима практически не приводит к изменению энергии, передаваемой в волну давления.

Усиление воздействия на пласт при электрическом взрыве проволочки в условиях фиксированного запаса энергии батареи конденсаторов обеспечивается повышением скорости энерговыделения. Если параметры проводника (l_{onm} – длина проводника, d_{onm} – диаметр проводника) и цепи (L – индуктивность цепи, C – емкость конденсатора, U_0 – зарядное напряжение) связаны соотношениями (2, 3)^{6,7}

$$d_{onm} = 2 \left[W_0 / z \rho_{II} \sigma_{II} (\lambda_{II} + \gamma_{II}) \right]^{1/4}, \quad (2)$$

$$l_{onm} = 2 \cdot 10^{-3} U_0 (LC)^{1/4}, \quad (3)$$

(здесь W_0 – энергия запасенная в конденсаторе; $z = (L/C)^{1/2}$ – волновое сопротивление; λ_{II} и γ_{II} – удельные теплоты плавления и парообразования; σ_{II} и ρ_{II} – удельная электропроводность и плотность проводника при нормальных условиях), будет обеспечена максимальная скорость выделения энергии в разрядном промежутке.

Записанные выражения предполагают выделение энергии, запасенной в конденсаторной батарее, в течение первого импульса тока разряда с максимальной скоростью.

Для стабилизированного условиями пробоя напряжения заряда конденсаторной батареи и постоянной индуктивности оптимальные соотношения между длиной разрядного промежутка и емкостью, обеспечивающие максимальное давление на заданном расстоянии r от канала, определяются уравнением (4)⁸:

$$l_{\pi}^2 = 2\pi Cr(LC)^{1/2}, \quad (4)$$

При нахождении этого выражения предполагалось, что длительность выделения энергии $T \approx 2\pi Cr(LC)^{1/2}$ соответствует критическому режиму. Разряд, близкий к критическому ($\eta < 1$ – доля энергии, выделившейся в канале за первый полупериод, от запасенной энергии), обеспечивает наиболее быструю передачу энергии от накопителя в канал разряда и наибольший электроакустический КПД. В этом случае, как показано в работе⁸, для расчета максимального давления в канале с относительной ошибкой меньше 15% может быть использовано простое выражение $P \cong 0.17(\rho U_0^2 / Ll_{\pi})^{1/2}$. Предполагая, что амплитуда цилиндрических ударных волн убывает с расстоянием по закону $\sim v^{-0.5}$, имеем $P_m \cong P(a(t_n)/r)^{1/2}$, здесь t_n – время, когда мощность достигает своего максимального значения; $a(t_n)$ – радиус цилиндрической ударной волны.

В зависимости от зоны, определяемой сравнением координаты с длиной разрядного промежутка, амплитудные значения волны давления для согласованного режима могут быть определены выражениями (5)⁹:

$$P \cong \frac{0.6 \cdot 10^2}{\sqrt{r}} \left(\frac{CU_0^2}{L} \right)^{5/16} \omega^{7/16}, \text{ при } a < r \leq 2.5l_{\pi}$$

$$P \cong \frac{0.8 \cdot 10^2}{\sqrt{r}} (1 - 0.1r/l_{\pi}) \left(\frac{CU_0^2}{L} \right)^{5/16} \omega^{7/16}, \text{ при } 2.5l_{\pi} < r \leq 5.5l_{\pi} \quad (5)$$

$$P \cong \frac{1.25}{r^{1.1}} (CU_0^2)^{5/8} \omega^{3/4}, \text{ при } 5.5l_{\pi} < r \leq 200l_{\pi}$$

Полученные выражения позволяют сделать важные в практическом отношении выводы, качественно характеризующие рассматриваемый процесс, например существование при фиксированном r оптимального разрядного промежутка, обеспечивающего при прочих равных условиях получение наибольших амплитуд давления. Так, в работе⁹ показано, что при фиксированном расстоянии до оси разряда r увеличение l_{π} приводит к появлению максимума на кривой $P(l_{\pi})$ в области $2.5 < r/l_{\pi} \leq 5.5$.

Для того чтобы с большей точностью моделировать ударную волну, возникающую при взрыве проволоочки в жидкости, и ее воздействие на призабойную зону, необходимо решать задачу об эволюции вещества металлической проволоочки при воздействии мощного импульса тока. При решении данной задачи необходимо учесть свойства

вещества проволоочки, описываемые уравнением состояния в широком диапазоне температур и плотностей. Полученное решение может быть использовано в качестве граничных условий для решения задачи о распространении ударной волны в жидкости в призабойной зоне.

Канал электрического разряда имеет достаточно сложную форму и заполнен низкотемпературной плазмой. Его формирование и расширение сопровождаются нелинейными электро- и гидродинамическими процессами в плазме и окружающей жидкости. Однако с точки зрения преобразования энергии эти процессы можно рассмотреть в упрощенной постановке, используя ряд предположений:

- канал разряда и образовавшаяся впоследствии парогазовая полость имеют форму кругового цилиндра;
- ось канала разряда (взрывающейся проволоочки) совпадает с осью скважины;
- термодинамические параметры плазмы и плотность электрического тока распределены однородно в объеме канала разряда.

Электродинамические колебательные процессы в разрядном контуре характеризуются уравнением баланса напряжений:

$$L \frac{dI}{dt} + (R_c + R_s + R_{II})I + \frac{1}{C} \int_0^{\tau} I dt = U_0,$$

где R_s – суммарное сопротивление контура без учета канала разряда, Ом; R_{II} – сопротивление взрывающейся проволоочки, Ом; $R_c = AI_{II}^2(\gamma - 1)/(P_k V_k)$ – электрическое сопротивление канала разряда (газоплазменной его части), Ом; P_k – давление в канале разряда, Па; $V_k = \pi R^2 l_{II}$ – объем канала разряда, м³; R – радиус канала разряда, м; γ – показатель адиабаты плазмы в канале разряда; A – искровая постоянная размерности Вольт²с/м²; I – сила тока в канале разряда; U_0 – напряжение заряда конденсаторной батареи, Вольт.

3 МОДЕЛИ ДЛЯ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОГО СОСТОЯНИЯ (НДС) ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЫ

Разрабатываемые математические модели ориентированы на производство расчетов напряженно-деформированного состояния пластов в случаях пороупругих и поровязких горных пород коллектора. Они позволяют рассчитывать нестационарные режимы фильтрации, что может быть, как в случае ПИВ, результатом переменного во времени воздействия на пласт. Разрабатываемые модели позволят оценивать оптимальность ПИВ в отношении обеспечения максимальной глубины проникновения поля упругих напряжений в зависимости от параметров воздействия. С этой целью потребуется выполнить вычислительные эксперименты, в которых будет выполнен расчет НДС в широком диапазоне изменения входных данных решаемых задач, т.е. проведена многопараметрическая оптимизация условий применения ПИВ. Такие эксперименты позволят построить обобщающие зависимости, представляющие собой функциональную связь наиболее значимых входных параметров и параметров, характеризующих эффективность ПИВ. Что касается входящих в уравнения моделей материальных констант и функций, выражающих свойства пороупругих и поровязких сред, то, как правило, они рассчитываются для равновесных или близких к равновесным состояний. Поэтому для

учета возможной модификации этих материальных констант и функциональных зависимостей в нестационарных условиях, при которых возможны сильно неравновесные состояния, необходимы лабораторные эксперименты с различными образцами пород по изучению их реакции на ПИВ.

Формулировка модели НДС. Основу настоящей разработки составляет нестационарный вариант модели деформации насыщенных пористых тел Био, описывающей связанные поля термического и упругого состояния породы в коллекторе.

Рассмотрим макроскопически однородное пористое тело, поры которого заполнены флюидом. Обозначим давление флюида p_0 и плотность ρ_0 в отсчетном состоянии. Зависимость плотности от давления примем в виде:

$$\rho / \rho_0 = 1 + (p - p_0) / K_f,$$

где K_f – коэффициент сжимаемости флюида. Температуру считаем фиксированной.

Обозначим перемещения частиц скелета под действием внешних сил $u_i(x)$, а частиц флюида – $v_i(x)$. Тензор деформации скелета имеет вид:

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Если τ_{ij} – тензор напряжений в пористом теле, то уравнение равновесия, имеет вид

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим элемент пористого тела, имеющий в отсчетном состоянии объем dV_0 , а в текущем – dV . Найдем работу совершаемую над этим элементом системы «пористое тело – флюид» при вариации смещений частиц скелета на δu_i и частиц флюида на δv_i . Часть работы, соответствующая совместному перемещению частиц скелета и флюида на δu_i , есть:

$$\delta_1 R = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV,$$

где $\delta \varepsilon_{ij}$ – вариация тензора деформаций.

Другая часть работы связана с перемещением флюида относительно скелета. Пусть в результате варьирования в рассматриваемый элемент пористого тела было введено количество флюида массы dM . Работа, которая была при этом совершена составила

$$p \delta V_f = p / \rho \delta M.$$

Так как рассматривается изотермический процесс, то совершенная над системой работа пошла на изменение ее свободной энергии. Кроме того, к свободной энергии системы вместе с флюидом была добавлена энергия $f \delta M$. Таким образом, изменение свободной энергии системы составило:

$$\delta F = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV + \frac{p}{\rho} \delta M + f \delta M.$$

Вычислим изменение свободной энергии флюида, содержащегося в рассматриваемом элементе пористого тела. Над флюидом было произведена работа по введению его в поровой пространство, а также была совершена работа $-p \delta m dV$, обусловленная изменением порового пространства в рассматриваемом элементе. Кроме того, к свободной энергии системы вместе с флюидом была добавлена энергия $f \delta M$. Таким образом, вариация свободной энергии флюида составила:

$$\delta F_f = \frac{p}{\rho} \delta M - p \delta m dV + f \delta M.$$

Соответственно, вариация свободной энергии скелета:

$$\delta F_s = (\tau_{ij} \delta e_{ij} + p \delta m) dV.$$

Относя свободную энергию скелета к единице объема пористого тела в отсчетном состоянии и пренебрегая (в рамках геометрически линейного приближения) отличием объема в актуальном и отсчетном состояниях, получаем для вариации плотности свободной энергии:

$$\delta f_s = \tau_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + p \delta m.$$

Это соотношение показывает, что плотность свободной энергии зависит только от тензора деформации и лагранжевой пористости. Так что, если задаться некоторой функцией $f_s = f_s(\varepsilon_{ij}, m)$, то

$$\tau_{ij} = \frac{\partial f_s}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad p = \frac{\partial f_s}{\partial m}.$$

Вместо пористости введем в рассмотрение отклонение пористости от ее значения в отсчетном состоянии $\varphi = m - m_0$. В рамках линейной теории упругости для изотропного насыщенного пористого тела:

$$f_s = \tau_{ij,0} \varepsilon_{ij} + p_0 \varphi + \mu \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{2} \varepsilon^2 + \frac{\alpha}{2} \varphi^2 - \beta \varphi \varepsilon. \quad (7)$$

Здесь μ , ν , α , β – некоторые коэффициенты, зависящие, вообще говоря, от x . Линейные по ε_{ij} и φ члены в (7) соответствуют напряжениям и давлению флюида в отсчетном состоянии, так как в отсутствие деформаций ($\varepsilon_{ij} = 0$) и избытка флюида в порах ($\varphi = 0$) поправки к напряжениям и давлению должны отсутствовать.

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели выражение для тензора напряжений

$$\tau_{ij} = \tau_{ij,0} + 2\mu e_{ij} + \nu \varepsilon \delta_{ij} - \beta \varphi \delta_{ij}, \quad (8)$$

а для порового давления

$$p = p_0 + \alpha\phi - \beta\varepsilon, \quad (9)$$

Подставляя ϕ , выраженное из (9), в (8), получаем тензор напряжений в виде

$$\tau_{ij} - \tau_{ij,0} = 2\mu e_{ij} + \lambda\varepsilon\delta_{ij} - \zeta(p - p_0)\delta_{ij}, \quad (10)$$

Здесь введены обозначения:

$$\zeta = \beta / \alpha, \quad \lambda = \nu - \zeta\beta = \nu - \beta^2 / \alpha.$$

Упругие модули пористых тел. Выясним физический смысл феноменологических коэффициентов μ , ν , α , β и их связь с измеримыми модулями упругости. Для этого рассмотрим следующие способы деформирования насыщенных пористых тел: дренажное деформирование происходит при постоянном давлении флюида в порах; недренажное деформирование имеет место при постоянном объеме флюида, содержащегося в пористом теле (другими словами, при фиксированной массе несжимаемого флюида). В дальнейшем полагаем $\tau_{ij,0} = 0$, $p_0 = 0$.

В случае дренажного деформирования $p = 0$ тензор напряжений имеет вид:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon\delta_{ij}.$$

Разлагая произвольную деформацию на сдвиг и всестороннее сжатие, получим модуль сжатия для дренажных условий:

$$K_d = \lambda + \frac{2}{3}\mu.$$

При недренажном деформировании не происходит перетекания несжимаемого флюида через ограничивающую тело поверхность. Подобно телам с «закрытыми порами», в рассматриваемом случае не происходит относительного смещения жидких частиц, соответственно $\phi = 0$. Таким образом, из (9) поровое давление есть:

$$p = -\beta\varepsilon,$$

а тензор напряжения определяется из (8) как:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (\lambda + \zeta\beta)\varepsilon\delta_{ij}.$$

Модуль объемного сжатия для недренажных условий имеет вид

$$K_u = \lambda + \frac{2}{3}\mu + \zeta\beta = K_d + \zeta\beta = K_d + \zeta^2\alpha, \quad (11)$$

Преобразуем выражение для энергии из (7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} f_s &= \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon \right)^2 + \frac{K_d}{2}\varepsilon^2 + \frac{\alpha}{2}(\phi - \zeta\varepsilon)^2 = \\ &= \tau_{ij,0}\varepsilon_{ij} + \mu \left(\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon \right)^2 + \frac{K_d}{2} \left(\varepsilon + \frac{\zeta p_0}{K_d} \right)^2 + \frac{\alpha}{2} \left(\phi - \zeta\varepsilon + \frac{p_0}{\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\zeta^2}{2K_d} + \frac{1}{\alpha} \right) p_0^2 \end{aligned}$$

Так как свободная энергия должна иметь минимальное значение при отсутствии деформаций ($\varepsilon_{ij} = 0$) и избытка флюида ($\varphi = 0$), то должны быть выполнены неравенства: $\mu > 0$, $K_u \geq K_d > 0$, $\alpha > 0$.

Рассмотрим деформирование насыщенного флюидом пористого тела, при подвергнутого равномерному всестороннему сжатию с постоянным давлением равным поровому. При таком деформировании тензор напряжений одинаков как в скелете (который деформируется однородно), так и в флюиде. Хотя такое деформирование возможно только для тел специальной структуры, по крайней мере имеющих однородный скелет, рассмотрение такого случая представляет интерес для установления качественных соотношений между модулями сжатия скелета K_s (как сплошной среды) и флюида K_f с модулями насыщенного пористого тела. С одной стороны, подобно равномерному всестороннему сжатию однородного скелета тела, тензор напряжений имеет вид:

$$\tau_{ij} = K_s e \delta_{ij} = -p \delta_{ij},$$

где K_s – модуль объемного сжатия скелета. С другой стороны, так как при всестороннем сжатии тензор деформации имеет вид $e_{ij} = e/3 \delta_{ij}$, то из (10) тензор напряжений есть $\tau_{ij} = (K_d e - \zeta p) \delta_{ij}$.

Сравнивая эти выражения для тензора напряжений, выразим коэффициент рыхлости ζ через определяемые экспериментально упругие объемные модули:

$$\zeta = 1 - K_d / K_s < 1. \quad (12)$$

Отсюда, учитывая связь между упругими модулями (8), (9), получаем:

$$\alpha = (K_u - K_d) / (1 - K_d / K_s)^2, \quad \beta = (K_u - K_d) / (1 - K_d / K_s).$$

Уравнения баланса массы флюида. Рассмотрим элемент пористого тела, имеющий в отсчетном состоянии объем δV_0 , насыщенный слабосжимаемым флюидом массы $m_0 \rho_0 \delta V_0$ при давлении $p_0 = 0$. Пусть в деформированном состоянии этот элемент занимает объем δV , давление флюида p . При этом масса флюида плотности ρ , содержащегося в порах, есть $m_E \rho \delta V$, где $m_E = V_p / V$.

В дальнейшем нас будет интересовать величина $M = m_L \rho$, имеющая смысл массы флюида отнесенной к объему δV_0 , занимаемому рассматриваемым элементом в отсчетном состоянии: $m_L = m_E V_p / V_0$, причем имеет место равенство $m = m_L$.

Функция M зависит от порового давления p и относительного изменения объема при деформировании e . Считая деформации малыми и тело изотропным, разложим M в ряд по степеням e и p до членов первого порядка:

$$M = M_0 + A e + B p. \quad (13)$$

где $M_0 = m_0 \rho_0$, $A, B = const$ – коэффициенты разложения.

В случае недренажного деформирования, рассматриваемая лагранжева пористость постоянна $m = m_0$, $\phi = 0$. Подставляя в (13) выражение для порового давления $p = -\beta\varepsilon$ из (9) при недренажном деформировании ($\varphi = 0$), имеем:

$$m_0\rho_0(1 + p/K_f) = M_0 + (-A/\beta + B)p,$$

так что $B = A/\beta + m_0\rho_0/K_f$.

Рассматривая дренажное деформирование ($p = 0$), получим:

$$0 = \alpha\varphi - \beta\varepsilon \text{ и } M = M_0 + A\varepsilon = M_0 + \frac{A\alpha}{\beta}\varphi.$$

С другой стороны, масса флюида на единицу недеформированного объема есть:

$$M = \rho_0 m = \rho_0(m_0 + \varphi).$$

Таким образом $A = \zeta\rho_0$, $B = \rho_0/\alpha + \rho_0 m_0/K_f$ и (12) принимает вид:

$$M = M_0 + \rho_0\left(\zeta e + \left(m_0/K_f + 1/\alpha\right)p\right).$$

Подставляя сюда выражение для феноменологического коэффициента α через объемные модули упругости K_u , K_d из (11), окончательно получим зависимость рассматриваемой массы M от порового давления p и деформации e в следующем виде:

$$M = M_0 + \rho_0\left(\zeta e + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d}\right)p\right). \quad (14)$$

Рассмотрим теперь баланс массы флюида, заключенного в рассматриваемом элементе пористого тела. Этот баланс имеет вид:

$$\frac{d}{dt}m\rho\delta V_0 = \delta V_0 \frac{dM}{dt} = -\delta V \operatorname{div} \rho \mathbf{W},$$

где $\delta V = \delta V_0(1 + R)$, \mathbf{W} – скорость фильтрации.

Ограничиваясь линейной теорией, заменяем:

$$\delta V \rightarrow \delta V_0, \quad \rho \rightarrow \rho_0, \quad \frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t},$$

и получаем уравнение неразрывности в виде:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_0 \mathbf{W} = 0. \quad (15)$$

Система уравнений, полученных выше, замыкается уравнением движения флюида в форме закона Дарси:

$$\Theta = \zeta e + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\xi^2}{K_u - K_d} \right) p,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{W} = -\frac{K}{\eta} \operatorname{grad} (p + p_0 - \rho g).$$

Т.к. в равновесии $p_0 = \rho g$, то:

$$\mathbf{W} = -\frac{K}{\eta} \operatorname{grad} p. \quad (16)$$

Приведенная выше система уравнений (6), (15), дополненная соотношениями (14), (16) получена Био¹. Она описывает фильтрационный процесс и вызываемое им напряженно-деформированное состояние пористой среды. Ввиду того что уравнения упругости квазистатические, эту модель называют квазистатической. Характерной особенностью процессов, описываемых моделью Био, является в свою очередь влияние напряженно-деформированного состояния среды на происходящие в ней процессы фильтрации.

4 ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЬЕЗОПРОВОДНОСТИ

Чтобы составить представление о характере процессов, описываемых в рамках модели Био, применим оператор $\partial/\partial x_i$ к уравнению (6). Тогда, учитывая (10), и полагая $\lambda, \mu = \text{const}$, $\partial f_i/\partial x_i = 0$, получим:

$$(2\mu + \lambda)\Delta e = \zeta \Delta p,$$

где приращение объема $e \equiv \varepsilon$ выражается через смещение U как $e = \Delta V / V = \operatorname{div} U$. Комбинируя это соотношение с (14) и, учитывая, что:

$$\frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \operatorname{div}(\operatorname{div} \tau) = (2\mu + \lambda)\Delta e - \zeta \Delta p = 0,$$

получаем:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{K}{\eta} \Delta p = 0, \quad (2\mu + \lambda)\Delta e = \zeta \Delta p,$$

$$\zeta \Delta e = -\left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\xi^2}{K_u - K_d} \right) \Delta p + \Delta \Theta, \quad \frac{2\mu + \lambda}{\zeta} \left\{ -\left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\xi^2}{K_u - K_d} \right) \Delta p + \Delta \Theta \right\} = \zeta \Delta p,$$

$$\frac{2\mu + \lambda}{\zeta} \Delta \Theta = \left\{ \zeta + \frac{2\mu + \lambda}{\zeta} \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\xi^2}{K_u - K_d} \right) \right\} \Delta p,$$

$$\Delta p = \frac{\frac{2\mu + \lambda}{\zeta}}{\zeta + \frac{2\mu + \lambda}{\zeta} \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d} \right)} \Delta \Theta.$$

Введение коэффициента пьезопроводности:

$$\chi = \frac{K}{\eta} \frac{2\mu + \lambda}{\zeta^2 + (2\mu + \lambda) \frac{m_0(K_u - K_d) + \zeta^2 K_f}{K_f(K_u - K_d)}} = \frac{K}{\eta} \frac{\alpha K_f}{K_f + \alpha m_0 + \frac{\zeta^2 \alpha K_f}{2\mu + \lambda}},$$

придает уравнению вид:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \chi \Delta \Theta.$$

Учитывая неравенства:

$$\alpha = \frac{K_u - K_d}{\zeta^2}, \quad \zeta = 1 - \frac{K_d}{K_s} < 1, \quad \mu > 0, \quad \text{т.е. } \alpha > 0$$

$$K_u \geq K_d > 0, \quad K_f = \rho_0 p / (\rho - \rho_0),$$

приходим к выводу, что флюидонасыщенность удовлетворяет параболическому уравнению. К сожалению, воспользоваться этим уравнением для решения задач пороупругости невозможно, так как граничные условия ставятся либо на давление p , либо на поток флюида $\partial p / \partial n$. Тем не менее, зная коэффициент пьезопроводности χ , можно оценить характерные времена процессов, описываемых уравнениями Био.

4 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ БИО

Следуя работе², учтем эффекты инерционности скелета, и заполняющего поровое пространство флюида. В модели двух взаимопроникающих континуумов², представляющих систему "скелет + флюид" (в дальнейшем, для краткости, систему), координаты точек одного континуума свяжем с координатами частиц скелета: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(0) + \mathbf{u}$, где $\mathbf{r}_1(0)$ – положение частицы в недеформированном состоянии. Ясно, что $\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$, так что \mathbf{u} могут быть сами приняты в качестве обобщенных координат.

Координаты точек другого континуума введем из условия:

$$\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} = \mathbf{W}(t, \mathbf{r}_2), \quad \text{то есть } \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(0) + \int_0^t \mathbf{W}(t', \mathbf{r}_2(t')) dt'.$$

где $\mathbf{r}_2(0)$ – положение точки в некоторый момент, принятый за начальный. Так же как для первого континуума удобнее в качестве обобщенной координаты рассматривать смещения $\mathbf{q} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2(0)$, при этом $d\mathbf{q} / dt = \mathbf{W}$. Отметим, что \mathbf{q} не являются смещениями частиц флюида относительно скелета. В случае однородного пористого тела $\mathbf{r}_f - \mathbf{r}_f(0) = \mathbf{q}/m$, где \mathbf{r}_f и $\mathbf{r}_f(0)$ – положение частицы флюида в текущий и начальный моменты времени. Для неоднородного пористого тела $\frac{d m \mathbf{r}_f}{dt} = \frac{d \mathbf{q}}{dt}$.

Вычислим кинетическую и «потенциальную» энергии системы, а так же ее диссипативную функцию. При вычислении кинетической энергии будем считать, что скорость изменения состояния системы достаточно мала, так что поле скорости флюида относительно скелета может быть представлено в виде:

$$w_i(x) = a_{ik}(x) W_k(x). \quad (17)$$

Быстроосциллирующие коэффициенты a_{ik} зависят от координат частицы флюида в поре и определяются геометрией порового пространства, скорость фильтрации W_k является медленно меняющейся («макроскопической») функцией пространственных переменных.

Кинетическая энергия единицы объема пористого тела есть:

$$T = (1-m) \frac{\rho_s}{2} \dot{u}_i^2 + \frac{\rho_f}{2} \int (\dot{u}_i + w_i)^2 dV_f. \quad (18)$$

Здесь: ρ_s, ρ_f – плотности скелета и флюида; u_i, \dot{u}_i – смещения и скорость частиц скелета; интегрирование проводится по объему порового пространства, что подчеркивает индекс f .

С учетом (17) соотношение (18) принимает вид:

$$T = \frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 + \rho_f \dot{u}_i W_i + \frac{\rho_f}{2} \gamma_{ij} W_i W_j, \quad (19)$$

где $\rho = m\rho_f + (1-m)\rho_s$ – средняя плотность насыщенного пористого тела, $\gamma_{ij} = \int a_{ki} a_{kj} dV_f$.

Для изотропного тела $\gamma_{ij} = \gamma \delta_{ij}$, $\gamma \sim 1/m$, так что:

$$T = \frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 + \rho_f \dot{u}_i W_i + \frac{\gamma \rho_f}{2} W_i^2. \quad (20)$$

Представив скорость фильтрации в виде $W_i = \dot{q}_i$ и проинтегрировав (20) по объему пористого тела, получим выражение для кинетической энергии системы:

$$\tau = \int \left(\frac{\rho}{2} \dot{u}_i^2 + \rho_f \dot{u}_i \dot{q}_i + \frac{\gamma \rho_f}{2} \dot{q}_i^2 \right) dV. \quad (21)$$

Наряду с кинетической энергией система обладает также «потенциальной» упругой энергией. Полная «потенциальная» энергия есть:

$$u = \int \left(\mu \varepsilon_{ij}^2 + \frac{\nu}{2} \varepsilon^2 + \frac{\alpha}{2} \varphi^2 - \beta \varphi \varepsilon \right) dV. \quad (22)$$

В (21), (22) интегрирование проводится по объему в недеформированном состоянии, соответственно плотности вычисляются относительно этого объема; ρ , ρ_f , γ , μ , ν , α , $\beta = const$.

При смещении частиц флюида относительно каркаса с конечной скоростью происходит диссипация энергии. При фильтрации со скоростью \mathbf{W} интенсивность диссипации энергии в единице объема составляет $\eta W_i^2 / K = \eta \dot{q}_i^2 / K$. Так как интенсивность диссипации является квадратичной функцией по обобщенным скоростям \dot{q}_i , то диссипативная функция системы имеет вид:

$$D = \int \frac{\eta}{2K} \dot{q}_i^2 dV. \quad (23)$$

Отметим, что $\tau = \tau(\dot{u}_i, \dot{q}_i)$, $u = u(\partial u_i / \partial x_j, \partial q_i / \partial x_j)$, $D = D(\dot{q}_i)$. Рассматривая u_i , q_i как обобщенные координаты и учитывая сделанное замечание, уравнения Лагранжа³ могут быть записаны в виде:

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \tau}{\delta \dot{u}_i} = - \frac{\delta u}{\delta u_i}, \quad (24)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta \tau}{\delta \dot{q}_i} = - \frac{\delta u}{\delta q_i} - \frac{\delta D}{\delta \dot{q}_i}$$

Здесь символ $\delta / \delta \varphi$ обозначает функциональную производную ($\varphi = u_i, q_i, \dot{u}_i, \dot{q}_i$).

Подставляя в (24) конкретный вид функционалов τ , u , D получим уравнения движения системы:

$$\frac{d}{dt} (\rho \dot{u}_i + \rho_f \dot{q}_i) = \frac{\delta \tau_{ij}}{\delta x_j}, \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} (\rho_f \dot{u}_i + \gamma \rho_f \dot{q}_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta}{K} \dot{q}_i$$

Здесь, как и выше:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial f_s}{\partial \varepsilon_{ij}} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon \delta_{ij} - \zeta p \delta_{ij}, \quad p = \frac{\partial f_s}{\partial \varphi} = \alpha \varphi - \beta \varepsilon. \quad (26)$$

В уравнениях (25) производные d/dt имеют различный смысл: в первом уравнении производная вычисляется при фиксированном u_i , то есть вдоль траектории точки первого континуума; во втором – при фиксированном q_i .

В рамках линейной теории $\frac{d}{dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial m}{\partial t} = 0$, $\rho_s, \rho_f = const$, так что окончательно уравнения движения континуумов примут вид:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial W_i}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad (27)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \gamma \rho_f \frac{\partial W_i}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\eta}{K} W_i$$

Здесь мы исключили из уравнений обобщенные координаты q_i точек второго континуума, так как они не имеют физического смысла. Действительно, замена $q_i \rightarrow q_i + \psi_i(x)$, где $\psi_i(x)$ – произвольная функция пространственных переменных, удовлетворяющих условию соленоидальности $\partial \psi_i / \partial x_i = 0$, не меняет уравнений (25) и соотношений (26). Физически это означает произвольность выбора начального положения точек второго континуума, от которого отсчитываются смещения q_i . Другими словами, одну порцию флюида можно заменить на другую не изменив при этом состояние системы «скелет + флюид».

Шесть уравнений системы (27) содержат семь неизвестных функций u_i , W_i , P . Седьмое уравнение для давления есть уравнение неразрывности в линейном приближении:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \text{div } \mathbf{W} = 0. \quad (28)$$

Уравнения (27), (28) совместно с соотношениями:

$$\theta = \zeta \varepsilon + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d} \right) p, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3} \right) = 0, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad \varepsilon = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \text{div } \vec{u},$$

описывают динамику системы “скелет+флюид” в рамках модели взаимопроникающих континуумов.

4 НЕСТАЦИОНАРНАЯ МОДЕЛЬ БИО

Уравнения, описывающие волновые процессы в насыщенной (однофазным слабосжимаемым флюидом) пористой среде имеют вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \operatorname{div} \boldsymbol{\tau}. \quad (30)$$

$$\rho_f \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \gamma \rho_f \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{\eta}{k} \mathbf{W}. \quad (31)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{W} = 0. \quad (32)$$

Здесь $\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon \delta_{ij} - \zeta p \delta_{ij}$ - полный тензор напряжений, $\Theta = \zeta \varepsilon + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d} \right) p$

- избыточный объем флюида

$\rho = m \rho_f + (1-m) \rho_s$, $\rho_s > \rho_f$ - средняя плотность системы «скелет»+«флюид»,

$\gamma \sim 1/m$ - коэффициент, характеризующий величину присоединенной массы (плотности), $\zeta \sim 1 - K_d / K_s < 1$ - коэффициент рыхлости скелета, $\mu > 0$, $K_u \geq K_d > 0$ - модуль сдвига и модули недренажного и дренажного сжатия.

Определяющие соотношения модели имеют вид:

$$p[-p_0] = \alpha \varphi - \beta \varepsilon, \quad \varphi = m - m_0.$$

Здесь $m = m_L = V_p / V_0$ - лагранжева пористость, $m_0 = V_{p0} / V_0$ лагранжева пористость в отсчетном состоянии.

Модуль дренажного сжатия связан с коэффициентами Ламе соотношением:

$$K_d = \lambda + \frac{2}{3} \mu.$$

Для дальнейшего введем величины, имеющие размерность плотности:

$$r_s = \rho - \frac{\rho_f}{\gamma} \sim (1-m) \rho_s > 0, \quad r_{fs} = \rho - \zeta \rho_f = \frac{K_d}{K_s} \rho_f + (1-m) (\rho_s - \rho_f) > 0.$$

При этом предполагается, что $\rho_s > \rho_f$.

Волновое уравнение для давления и относительного изменения объема.

Известно, что модель Био описывает распространение продольных волн двух типов и поперечной волны с двумя возможными поляризациями. В последних не происходит изменения объема и давления. Смещения и скорости в них имеют вихревой вид. Чтобы исключить из рассмотрения поперечные волны, преобразуем уравнения Био к виду, содержащему только те переменные, которые меняются в продольных волнах: давление и относительное изменение объема (в силу (29) последнее эквивалентно избыточному объему флюида Θ).

Запишем (30) в виде:

$$-\gamma\rho_f\left(\rho - \frac{\rho_f}{\gamma}\right)\frac{\partial\mathbf{W}}{\partial t} = \rho_f\operatorname{div}\boldsymbol{\tau} + \rho\nabla p + \rho\frac{\eta}{K}\mathbf{W},$$

и применим операцию div , тогда получаем:

$$-\gamma\rho_f\left(\rho - \frac{\rho_f}{\gamma}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{W}) + \rho\frac{\eta}{K}\operatorname{div}\mathbf{W} + \rho_f\operatorname{div}(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}) + \rho\nabla p = 0.$$

Из (30), (32) следует:

$$\operatorname{div}(\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}) = (2\mu + \lambda)\Delta\varepsilon - \zeta\Delta p, \quad p - \rho_f/\gamma = r_s.$$

Воспользовавшись этим выражением, получим:

$$-\gamma\rho_f r_s \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{W}) + \rho\frac{\eta}{K}\operatorname{div}\mathbf{W} + \rho_f(2\mu + \lambda)\Delta\varepsilon + (\rho - \zeta\rho_f)\rho_f\Delta p = 0.$$

Обозначив:

$$r_{fs} = \frac{K_d}{K_s}\rho_f + (1-m)\underbrace{(\rho_s - \rho_f)}_{>0},$$

и учитывая (32) переписываем последнее уравнение в виде:

$$-\gamma\rho_f r_s \frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} + \rho\frac{\eta}{K}\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \rho_f(2\mu + \lambda)\Delta\varepsilon + r_{fs}\Delta p.$$

Подставляя сюда $\Theta = \zeta\varepsilon + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d}\right)p$, окончательно находим:

$$\begin{aligned} & \left\{ \gamma\rho_f r_s \zeta \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2} + \rho\frac{\eta}{K}\zeta\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \rho_f(2\mu + \lambda)\Delta\varepsilon \right\} + \\ & \left\{ \gamma\rho_f r_s \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \rho\frac{\eta}{K} \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{1}{\alpha} \right) \frac{\partial p}{\partial t} - r_{fs}\Delta p \right\} = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

Ищем решение уравнения (33) в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin[\mathbf{k}_\varepsilon \mathbf{r} - \omega_\varepsilon t + \varepsilon_\infty],$$

$$p = p_0 \sin[\mathbf{k}_p \mathbf{r} - \omega_p t + p_\infty],$$

где волновые векторы обладают свойством $k = |\mathbf{k}|$, $k^2 = k_i^2$.

Будем рассматривать случай без диссипации, т.е. $\rho\frac{\eta}{K} \rightarrow 0$.

Приравниваем к нулю выражения в фигурных скобках (33) получим соответственно:

$$1. \gamma \rho_f r_s \zeta \omega_\varepsilon^2 - \rho_f (2\mu + \lambda) k_\varepsilon^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\omega_\varepsilon}{k_\varepsilon} \right)^2 = \frac{2\mu + \lambda}{\gamma r_s \zeta} = \frac{K_d + \frac{4}{3}\mu}{\gamma r_s \left(1 - \frac{K_d}{K_s} \right)};$$

$$2. \gamma \rho_f r_s \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{1}{\alpha} \right) \omega_p^2 - r_{fs} k_p^2 = 0,$$

$$\left(\frac{\omega_p}{k_p} \right)^2 = \frac{r_{fs}}{\gamma \rho_f r_s \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{1}{\alpha} \right)} = \frac{r_{fs}}{\gamma \rho_f r_s \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{(1 - K_d / K_s)^2}{K_u - K_d} \right)}.$$

Проведем оценку скоростей распространения продольных волн по полученным формулам, для чего примем следующие численные значения параметров.

Примем, что плотность скелета и его модуль сдвига равны соответственно $\rho_s = 2.7 \times 10^3$ кг/м³, $\mu = 1.33 \times 10^{10}$ Па. Давление в дренажном и недренажном модулях сжатия возьмем соответственно $K_d = 1.307 \times 10^{10}$ Па, $K_u = 3.057 \times 10^{10}$ Па, в модуле сжатия вещества скелета - $K_s = 3.60 \times 10^{10}$ Па. Величина проницаемости составляет $K = 0.1$ Дарси (1 Дарси = 1.02×10^{-12} м²), пористости - $m = 0.1$, $\gamma = 1/m = 10$. Плотность флюида (воды) равна $\rho_f = 10^3$ кг/м³, коэффициент динамической вязкости равен $\eta = 0.4 \times 10^{-3}$ Па·с (при 70° С), модуль сжатия - $K_f = 0.2 \times 10^{10}$ Па. Усредненные характеристики насыщенной среды составляют: $r_s = (1 - m)\rho_s = 0.9\rho_s$, $\rho = (0.1 \cdot 1 + 0.9 \cdot 27) \times 10^3$ кг/м³ = 2.53×10^3 кг/м³.

При данных параметрах оценка для скорости волны v_ε дает:

$$v_\varepsilon = \omega_\varepsilon / k_\varepsilon = \sqrt{2} \times 10^3 \text{ м/с} \approx 1.4 \text{ км/с}.$$

Оценка для скорости волны v_p приводит к результату:

$$v_p = \omega_p / k_p = 1.03 \times 10^3 \text{ м/с} = 1.03 \text{ км/с}.$$

Таким образом, волны деформации относительно объема скелета $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin[\mathbf{k}_\varepsilon \mathbf{r} - \omega_\varepsilon t]$ распространяются в 1.4 раза быстрее собственных волн сжатия (давления) флюида в порах $p = p_0 \sin[\mathbf{k}_p \mathbf{r} - \omega_p t]$.

Качественная оценка пьезопроводности приводит к результату:

$$L \sim \sqrt{\chi t}, \chi \sim 6 \text{ м}^2/\text{с}, t \sim 3 \text{ часа} \sim 10^4 \text{ с}.$$

Оценка времени колебаний выражается неравенствами:

$$\frac{\gamma \rho_f r_s}{t_p} > \rho \frac{\eta}{K}, t_p \leq \frac{\gamma \rho_f r_s}{\rho} \cdot \frac{K}{\eta},$$

$$\rho = m \rho_f + (1-m) \rho_s = (0.1 \cdot 1 + 0.9 \cdot 27) \times 10^3 = 2.53 \times 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$t_p \leq 0.637 \frac{10^3 \cdot 2.43 \times 10^3}{2.53 \times 10^3} \cdot \frac{0.1 \times 10^{-12}}{0.4 \times 10^{-3}} = \frac{0.637 \cdot 2.43}{2.53 \cdot 0.4} \times 10^{-7} \approx 1.53 \times 10^{-7} \text{ с}.$$

Малое влияние колебательных процессов сравнительно с интенсивностью пьезопроводности характеризуется системой неравенств :

$$\frac{\gamma \rho_f r_s}{t_\varepsilon} \geq \rho \frac{\eta}{K}, t_\varepsilon \leq \frac{\gamma \rho_f r_s}{\rho} \cdot \frac{K}{\eta}.$$

4 ПЕРЕХОД К ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ИНВАРИАНТАМ

Рассмотрим инварианты Римана для нестационарной системы Био:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \rho_f \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \Delta \varepsilon - \zeta \Delta p \\ \rho_f \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \gamma \rho_f \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -\Delta p - \frac{\eta}{K} \operatorname{div} \mathbf{W} \end{cases} \quad (34)$$

Путем замены переменных:

$$\Theta = \zeta \varepsilon + \left(\frac{m_0}{K_f} + \frac{\zeta^2}{K_u - K_d} \right), p = \zeta \varepsilon + \zeta_p p, \zeta_p > 0,$$

систему (34) перепишем в виде:

$$\begin{cases} \underbrace{(\rho - \rho_f \zeta)}_{r_{\varepsilon} > 0} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \rho_f \zeta_p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \Delta \varepsilon - \zeta \Delta p \\ \rho_f (1 - \gamma \zeta) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} - \gamma \rho_f \zeta_p \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\Delta p - \frac{\eta}{K} \operatorname{div} \mathbf{W} \end{cases} \quad (35)$$

Систему (35) можно разрешить относительно производных по времени и привести к виду:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} = \frac{2\mu + \lambda}{r_s} \Delta \varepsilon + \frac{1}{r_s} \left(\frac{1}{\gamma} - \zeta \right) \Delta p + \frac{1}{\gamma r_s} \frac{\eta}{K} \operatorname{div} \mathbf{W} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - \zeta \right) (2\mu + \lambda)}{\zeta_p r_s} \Delta \varepsilon + \frac{1}{\zeta_p r_s} \left[\frac{r_{fs}}{\gamma \rho_f} - \left(\frac{1}{\gamma} - \zeta \right) \zeta \right] \Delta p + \frac{r_{fs}}{\gamma \rho_f \zeta_p r_s} \frac{\eta}{K} \operatorname{div} \mathbf{W} \end{array} \right. , \quad (36)$$

или, в компактной записи:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2} = A \Delta \mathbf{y} + \mathbf{f} ,$$

где $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ p \end{pmatrix}$, $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Собственные числа найдем, как обычно, из условия равенства нулю определителя системы $\operatorname{Det} \| A - \tilde{\lambda} E \| = 0$, в результате относительно корней $\tilde{\lambda}$ получаем квадратное уравнение, оба корня которого λ_{\pm} вещественны. Характеристическое уравнение вида $\mathbf{e}_{\pm} A = \lambda_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}$ имеет инварианты Римана вида $r_{+} = (\mathbf{e}_{+}, \mathbf{y})$ и $r_{-} = (\mathbf{e}_{-}, \mathbf{y})$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} r_{\pm} = \lambda_{\pm} \Lambda r_{\pm} + (\mathbf{e}_{\pm}, \mathbf{f}) .$$

При малых пористостях собственные числа – скорости распространения волн – положительны, $\lambda_{\pm} > 0$, что соответствует отводу энергии из зоны влияния ПИВ. Если это условие не выполнено, в среде возможно формирование стоячих волн.

5 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель пороупругой насыщенной флюидом среды, на основе которой можно выполнять согласованные расчеты гидромеханических эффектов ПИВ в зависимости от интенсивности и частоты импульсов тока. Численное моделирование волн давления в околоскважинном пространстве дает возможность оценить показатели ПИВ по отношению к устранению кольматации в окрестности скважины, а также повышению проницаемости и пористости коллектора.

Построенные модели пороупругих сред могут быть применены для решения различных задач, относящихся к использованию технологии ПИВ:

1. Повышение нефтеотдачи пласта традиционных залежей в результате:
 - a. Изменения его проницаемости и пористости.
 - b. Устранения кольматации в окрестности скважины.
2. Повышение нефтеотдачи пластов баженовской свиты в результате:
 - a. Воздействия на кероген с последующим его пиролизом.
 - b. Воздействия на связанную нефть, которая переводится в свободное состояние, допускающее фильтрацию легких фракций нефти.

REFERENCES

- [1] P.G. Ageev, V.K. Nechaev. Primenenie plazmenno-impul'snoj tehnologii dlja uvelichenija izvlekaemosti uglevodorodov. *M.:Burenje i neft*, No. 10, 58-60, (2009).
- [2] M.A. Biot, Mechanics of Deformation and Propagation in Popous Media. *J. Appl. Phys.*, **33**, № 4, 1482-1498, (1962).
- [3] A.V. Koldoba, A.H. Pergament, JU.A. Poveshhenko, N.A. Simus. Naprjazhenno-deformirovanoe sostojanie nasyshhennoj poristoj sredy, vyzvanoe fil'traciej zhidkosti. *Matematicheskoe modelirovanie*, **11**, No. 10, 3–16, (1999).
- [4] T.P. Belousov, I.A. Iskakov, A.V. Karakin, R.H. Muslimov, SH.A. Muhamediev, Aktivnye razlomy, naprjazhennye sostojanija i sejsmichnost' JUgo-Vostochnogo Tatarstana. M.: IOFZ RAN, *Sejsmichnost' i sejsmicheskoe rajonirovanie Severnoj Evrazii*, 2/3, 90-108, (1995).
- [5] H.A. Rahmatullin, Osnovy gazodinamiki vzaimopronikajushhijh dvizhenij szhimaemyh sred. *PMM*, **20**, No. 2, 184-195, (1956).
- [6] E.V. Krivickij. *Dinamika jelektrovzryva v zhidkosti*. Kiev:Naukova Dumka, (1986).
- [7] E.V. Krivickij, V.L. Apostoli, V.K. SHolom, V.V. SHamko, Opredelenie optimal'nogo diametra vzryvajushhejsja provolochki. Kiev:Ukr.:NIINTI, *Primenenie jelektrogidravlicheskogo jeffekta v tehnologicheskijh processah*, 14, 79—81, (1970).
- [8] K.A. Naugol'nyh, Raschet rezhima jelektricheskogo razrjada v zhidkosti. *Trudy Akusticheskogo instituta*, No. 14, 136—143, (1971).
- [9] N.I. Konovjazin, V.V. Ippolitov, V.M. Kosenkov i dr., Metodika opredelenija i jeksperimental'nye issledovanie udel'nogo impul'sa davlenija, sozdavaemogo vozmushhenijami ot istochnika jelektrozrjadnogo tipa. Tjumen': *Neft' i gaz, Izvestija vysshijh uchebnyh zavedenij*, No. 1, 12-23, (2000).

Поступила в редакцию 2 июля 2013 года.