

ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА ЦРНЕ ГОРЕ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
УНИВЕРЗИТЕТА ЦРНЕ ГОРЕ

---

# МАТЕМАТИКА ЦРНЕ ГОРЕ

КЊИГА XXVIII

# MATHEMATICA MONTISNIGRI

VOLUME XXVIII

## CONTENTS

### Mathematics

- Никола Михалевич. Асимптотика собственных значений оператора типа Штурма-Лиувилля с переменным запаздыванием..... 5
- Gleb V. Fedorov. The greatest order of the divisor function with increasing dimension. 17

### Mathematical modeling

- А.В. Березин, А.А. Крюков, М.Б. Марков, Б.Д. Плющенко. Вычисление электромагнитного поля с заданным волновым фронтом на нерегулярной сетке... 25
- С.И. Ткаченко, В.А. Гасилов, А.Ю. Круковский, О.Г. Ольховская, И.П. Цыгвинцев. Вычислительная модель и результаты численного анализа электровзрыва тонких алюминиевых проводников..... 39
- A.V. Tolokonnikov. Investigation of the boundary conditions influence on the ground state properties of a two-electron atom in a cavity..... 62
- П.Г. Агеев, А.В. Колдоба, И.В. Гасилова, Н.Ю. Повещенко, М.В. Якобовский, С.И. Ткаченко. Комплексная модель отклика пласта на плазменно-импульсное воздействие..... 75

### Computer science applications

- Dušan S. Jokanović, M. Marina. Zirojević. Using “Wolfram mathematica 9.0” to simulate probability problems..... 99
- S. Scepanovic, I. Vukotic. Rip Vs. Eigrp..... 107

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С ЗАДАННЫМ ВОЛНОВЫМ ФРОНТОМ НА НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТКЕ

А.В. БЕРЕЗИН<sup>\*</sup>, А.А. КРЮКОВ<sup>\*</sup>, М.Б. МАРКОВ<sup>\*</sup>, Б.Д. ПЛЮЩЕНКОВ<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Москва, Россия  
e-mail: anton.krv@gmail.com, web page: <http://www.keldysh.ru>

**Ключевые слова:** Численные методы, электродинамика, нерегулярная сетка

**Аннотация.** Представлен алгоритм численного решения задачи Гурса для уравнений Максвелла на нерегулярной прямоугольной сетке. Алгоритм предназначен для исследования генерации электромагнитного поля импульсным источником, распространения в среде большого объема и дифракции на сложной преграде. Рассмотрены уравнения Максвелла в системе отсчета, связанной с фронтом излучения. Построена неявная полностью консервативная разностная схема на нерегулярной разностной сетке. Представлены результаты тестовых расчетов электромагнитного поля.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, код проекта 11-01-00114-а

## THE CALCULATION OF ELECTROMAGNETIC FIELD WITH THE GIVEN WAVEFRONT ON THE IRREGULAR MESH

A.V.BEREZIN<sup>\*</sup>, A.A.KRYUKOV<sup>\*</sup>, M.B.MARKOV<sup>\*</sup>, B.D.PLYUSHCHENKOV<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science  
e-mail: anton.krv@gmail.com, web page: <http://www.keldysh.ru>

**Key words:** Numerical methods, electrodynamics, nonuniform mesh

**Summary.** The algorithm of Goursat problem for Maxwell's equations numerical solving is represented. The algorithm is intended for electromagnetic field generation by pulse source, propagation in medium of great volume and diffraction on the complex barrier. Maxwell's equations are considered in coordinate system, which is connected with electromagnetic wave front. The implicit fully conservative difference scheme is constructed on the irregular mesh. The results of test calculations are represented.

Supported by Russian Foundation for Basic Research, project code 11-01-00114-a

**2010 Mathematics Subject Classification:** 68U20, 78A25, 78M20.

**Key words and Phrases** Numerical methods, electrodynamics, nonuniform mesh.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование распространения высокочастотного электромагнитного импульса (ЭМИ) и его взаимодействия с техническими объектами актуально для защиты электронных приборов, расположенных в дальней зоне генератора электромагнитных помех. Одной из проблем численного моделирования является затухание ЭМИ при прохождении неоднородной среды относительно большого объема и его дифракция на преградах относительно малого размера. Обычно характерные линейные размеры области, в которой происходит затухание, превышают длину волны, соответствующей пиковой частоте импульса, на порядки. Применение конечно-разностных или конечно-элементных схем решения уравнений Максвелла для исследования распространения ЭМИ в такой ситуации в лабораторном времени требует введения подробной сетки по времени и пространственным переменным для уменьшения фазовых искажений. В ряде практически важных задач это означает недопустимый объем вычислений. Выделение переднего фронта позволяет вводить подробную сетку только на тех интервалах времени, где необходимо исследовать процессы затухания или дифракции. Это даёт возможность, с одной стороны, исключить из рассмотрения те точки пространства-времени, до которых импульс еще не распространился, а с другой – достаточно подробно описать его временную зависимость, сохраняя крупную пространственную сетку. Второй проблемой является вычисление компонент ЭМИ в окрестности преграды, где необходимо вводить мелкую сетку. Указанные проблемы возникают одновременно.

Использование регулярных декартовых сеток в этом случае приводит к увеличению вычислительных затрат. Это критично для задач в трехмерной геометрии, где сложность вычислительных алгоритмов пропорциональна кубу характерного числа разбиения.

В данной работе изложены принципы построения и решения уравнений неявной полностью консервативной разностной схемы для решения уравнений Максвелла с выделенным передним фронтом в трехмерной постановке. Описан принцип построения нерегулярной разностной декартовой сетки. Приведены сравнительные результаты расчетов с использованием регулярной и нерегулярной дискретизации расчетной области.

## 2 УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В СОБСТВЕННОМ ВРЕМЕНИ

Решение задач для уравнений Максвелла с выделением переднего фронта подразумевает переход от лабораторного времени  $t$  к «собственному» времени<sup>1,3</sup>

$$\xi = ct - \psi(\mathbf{r}), \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Трёхмерные уравнения Максвелла в системе CGS в собственном времени имеют следующий вид<sup>2,7</sup>:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{e}, \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi} \right] + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \mathbf{I}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{c} \left[ \mathbf{e}, \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} \right] - \frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi}, \quad \mathbf{e} = \operatorname{grad} \psi(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ ,  $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t, \mathbf{r})$  – напряженности электрического и магнитного поля,

$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{r})$  – относительная диэлектрическая и магнитная проницаемость среды. Плотность тока  $\mathbf{I} = (4\pi/c)(\sigma\mathbf{E} + \mathbf{J})$ , где  $\sigma(\xi, \mathbf{r})$  – проводимость среды, а  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(\xi, \mathbf{r})$  – плотность стороннего тока.  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  – пространственные декартовы координаты.

Функция  $\psi(\mathbf{r})$  определяет геометрическое место точек переднего фронта ( $\psi(\mathbf{r}) = ct$ ) для любого фиксированного  $t$ . Она должна удовлетворять уравнению эйконала<sup>1</sup>:

$$\text{grad}^2\psi(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r})\mu(\mathbf{r}). \quad (3)$$

В однородной среде с  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$   $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Для неоднородной среды с  $\varepsilon\mu > 1$   $\psi(\mathbf{r})$  ищется через уравнение (3), используя традиционный метод<sup>2,4</sup>.

В области, где  $\varepsilon = 1$  и  $\mu = 1$ , передний фронт является характеристической поверхностью для уравнений Максвелла. Выделение сферического фронта и задание на нем начальных условий означает постановку задачи Гурса для уравнений Максвелла<sup>4</sup>. Известно, что для задач с начальными данными на характеристиках явные разностные схемы неустойчивы. Поэтому в данной работе рассматривается неявная разностная схема.

## 2.1 Построение разностной схемы

Пусть  $\Omega = \{x, y, z : x \in [x_{\min}, x_{\max}], y \in [y_{\min}, y_{\max}], z \in [z_{\min}, z_{\max}]\}$  – область изменения пространственных переменных, содержащая начало координат, в которой рассматривается решение уравнений Максвелла для  $\{\xi : \xi \in [0, \xi_{\max}]\}$ .

Введем разностную сетку по переменной  $x$ :

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_{i+1/2}; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_0 = x_{\min}, \quad x_{N_x} = x_{\max},$$

$$x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2; \quad i = 0, \dots, N_x - 1, \quad x_{-1/2} = x_0, \quad x_{N_x+1/2} = x_{N_x},$$

$$\delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}; \quad i = 0, \dots, N_x, \quad \delta x_0 = \Delta x_{1/2}/2, \quad \delta x_{N_x} = \Delta x_{N_x-1/2}/2.$$

Разностная сетка для переменных  $(y, z)$  вводится аналогично. Такая дискретизация разбивает расчетную область на прямоугольные ячейки с полуцелыми индексами  $\left\{\frac{1}{2} \leq i \leq N_x - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leq j \leq N_y - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \leq k \leq N_z - \frac{1}{2}\right\}$  и размерами  $\Delta x_{i+1/2}, \Delta y_{j+1/2}, \Delta z_{k+1/2}$ . Будем считать, что значения градиента выделенного фронта, проводимости, диэлектрической и магнитной проницаемости заданы в центрах ячеек.

Сеточные компоненты электрического поля  $E^x$ ,  $E^y$  и  $E^z$  определим в середине соответствующих ребер указанных прямоугольных ячеек.

Сохраним обозначения для сеточных функций. Соответствие  $\cong$  между сеточными и дифференциальными компонентами электрического поля следующее:

$$\begin{aligned} E_{i+1/2,j,k}^x &\cong E^x(x_{i+1/2}, y_j, z_k, \xi), \quad E_{i,j+1/2,k}^y \cong E^y(x_i, y_{j+1/2}, z_k, \xi), \\ E_{i,j,k+1/2}^z &\cong E^z(x_i, y_j, z_{k+1/2}, \xi). \end{aligned} \quad (4)$$

Компоненты напряженности магнитного поля  $H^x$ ,  $H^y$ ,  $H^z$  разместим в центрах граней ячеек. Определим сеточные компоненты напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} H_{i,j+1/2,k+1/2}^x &\cong H^x(x_i, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}, \xi), \quad H_{i+1/2,j,k+1/2}^y \cong H^y(x_{i+1/2}, y_j, z_{k+1/2}, \xi), \\ H_{i+1/2,j+1/2,k}^z &\cong H^z(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_k, \xi), \end{aligned} \quad (5)$$

и сеточные значения физических параметров расчетной области  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} &\cong \varepsilon(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}), \quad \mu_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \cong \mu(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}), \\ \sigma_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} &\cong \sigma(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}), \quad e_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^x \cong e^x(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}), \\ e_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^y &\cong e^y(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}), \quad e_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}^z \cong e^z(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}). \end{aligned} \quad (6)$$

Дифференциально-разностные аналоги (1) строятся интегрированием уравнений Максвелла по ячейке разностной пространственной сетки<sup>13</sup>.

Уравнение для  $x$ -компоненты электрического поля

$$\partial_y H^z - \partial_z H^y = e^y \dot{H}^z - e^z \dot{H}^y + \varepsilon \dot{E}^x + I^x, \quad (7)$$

имеет конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} \partial_y H^z \Big|_{i+1/2,j,k} - \partial_z H^y \Big|_{i+1/2,j,k} &= \langle \langle \varepsilon \rangle \rangle_{i+1/2,j,k} \dot{E}_{i+1/2,j,k}^x + I_{i+1/2,j,k}^x + \\ &\left( (\Delta y_{j-1/2} / 2\delta y_j) \langle e^y \rangle_{i+1/2,j-1/2,k} \dot{H}_{i+1/2,j-1/2,k}^z + (\Delta y_{j+1/2} / 2\delta y_j) \langle e^y \rangle_{i+1/2,j+1/2,k} \dot{H}_{i+1/2,j+1/2,k}^z \right) - \\ &\left( (\Delta z_{k-1/2} / 2\delta z_k) \langle e^z \rangle_{i+1/2,j,k-1/2} \dot{H}_{i+1/2,j,k-1/2}^y + (\Delta z_{k+1/2} / 2\delta z_k) \langle e^z \rangle_{i+1/2,j,k+1/2} \dot{H}_{i+1/2,j,k+1/2}^y \right), \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} I_{i+1/2,j,k}^x &= (4\pi/c)(\sigma_{i+1/2,j,k} E_{i+1/2,j,k}^x + J_{i+1/2,j,k}^x), \\ \partial_y H^z &= (H_{i+1/2,j+1/2,k}^z - H_{i+1/2,j-1/2,k}^z) / \delta y_j, \\ \partial_z H^y &= (H_{i+1/2,j,k+1/2}^y - H_{i+1/2,j,k-1/2}^y) / \delta z_k. \end{aligned}$$

Здесь и далее используются следующие обозначения. Символ  $\dot{u} = (u^{n+1} - u^n) / \tau_n$  обозначает разностную производную по  $\xi$ , а  $u^n$  значение функции  $u$  на  $n$ -ом временном слое. Определим  $u = \alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n = \alpha \tau_n \dot{u} + u^n$ ,  $\alpha \in [0,1]$ . Символ  $\langle u \rangle_{i+1/2,j,k+1/2}$  обозначает средневзвешенное значение сеточной функции  $u$ , определенной выше, заданной в узлах сетки с дробными индексами в точке пространственной сетки с индексами  $i+1/2, j, k+1/2$ :

$$\langle u \rangle_{i+1/2,j,k+1/2} = (\Delta y_{j-1/2} / 2\delta y_j) u_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} + (\Delta y_{j+1/2} / 2\delta y_j) u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2}.$$

Символ  $\langle \langle u \rangle \rangle_{i+1/2,j,k}$  обозначает средневзвешенное значение сеточной функции  $u$ , заданной в узлах сетки с дробными индексами в точке сетки с индексами  $i+1/2, j, k$

$$\begin{aligned} \langle\langle u \rangle\rangle_{i+1/2,j,k} &= u_{i+1/2,j-1/2,k-1/2} \frac{\Delta y_{j-1/2}}{2\delta y_j} \frac{\Delta z_{k-1/2}}{2\delta z_k} + u_{i+1/2,j-1/2,k+1/2} \frac{\Delta y_{j-1/2}}{2\delta y_j} \frac{\Delta z_{k+1/2}}{2\delta z_k} + \\ &u_{i+1/2,j+1/2,k+1/2} \frac{\Delta y_{j+1/2}}{2\delta y_j} \frac{\Delta z_{k+1/2}}{2\delta z_k} + u_{i+1/2,j+1/2,k-1/2} \frac{\Delta y_{j+1/2}}{2\delta y_j} \frac{\Delta z_{k-1/2}}{2\delta z_k}. \end{aligned}$$

Уравнение для  $x$ -компоненты магнитного поля

$$\partial_z E^y - \partial_y E^z = e^z \dot{E}^y - e^y \dot{E}^z + \mu \dot{H}^x, \quad (8)$$

имеет конечно-разностный аналог:

$$\begin{aligned} \partial_z E^y \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} - \partial_y E^z \Big|_{i,j+1/2,k+1/2} &= \langle \mu \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} \dot{H}_{i,j+1/2,k+1/2}^x + \\ &\langle e^z \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} \left( \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y \right) / 2 - \langle e^y \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} \left( \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) / 2, \end{aligned}$$

где:  $\partial_z E^y = (E_{i,j+1/2,k+1}^y - E_{i,j+1/2,k}^y) / \Delta z_{k+1/2}$ ,  $\partial_y E^z = (E_{i,j+1,k+1/2}^z - E_{i,j,k+1/2}^z) / \Delta y_{j+1/2}$ . Для остальных компонент электромагнитного поля конечно-разностные аналоги получаются аналогично<sup>1</sup>.

Приведенные конечно-разностные уравнения дивергентны (консервативны) по построению. Они аппроксимируют систему (1) со вторым порядком точности в сеточной норме пространства непрерывных функций при  $\alpha = 1/2$ , гладкости коэффициентов и равномерной сетке по пространственным переменным. При  $\alpha \in (1/2, 1]$  и неравномерной сетке имеет место первый порядок аппроксимации.

## 2.2 Разностная аппроксимация граничных условий

Граничные условия ставятся независимо на каждой грани прямоугольной расчетной области. Рассматривается два возможных типа граничных условий и их разностные аналоги.

Если целью решения является изучение распространения импульса внутри экранированной области, то граница задаётся поверхностью идеального проводника. Идеальная проводимость является приближением, но такое граничное условие не затрагивает дифференциальную часть уравнений Максвелла и требует только ограниченности решения<sup>2,5,6</sup>. На поверхности идеального проводника выполняется условие:

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}] = 0 \quad (9)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к границе расчетной области, т.е. тангенциальные компоненты электрического поля к поверхности границы равны нулю. Например, на границе  $y = y_{\min}$  (9) эквивалентно разностным условиям:

$$E_{i,0,k+1/2}^z = 0 \text{ для } i = 0, \dots, N_x; k = 0, \dots, N_z - 1, \quad E_{i+1/2,0,k}^x = 0 \text{ для } i = 0, \dots, N_x - 1; k = 0, \dots, N_z.$$

Для задач, в которых исследуется распространение импульса уходящего на бесконечность необходимо использовать так называемые неотражающие граничные условия. Реализация подобных условий описана в<sup>11, 13</sup> и является отдельной сложной и затратной по необходимым ресурсам задачей. Большинство задач, которые решаются с помощью данной методики, имеют импульсный режим генерации электромагнитного

поля. Размер расчетной области для таких задач достаточно большой, и отраженные электромагнитные волны от границ области не успевают внести существенное искажение в картину распределения электромагнитных полей внутри нее. Вместо неотражающих условий в методике используются граничные условия, называемые условиями отсутствием волн из бесконечности для компактного излучателя в вакууме<sup>8</sup>. В сферической системе координат  $(r, \vartheta, \varphi)$  с началом координат в центре излучателя эти условия имеют следующий вид:

$$\sqrt{\mu/\varepsilon}H^\vartheta = -E^\varphi, \sqrt{\mu/\varepsilon}H^\varphi = -E^\vartheta, H^r = E^r = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (10)$$

Для этих условий  $r$ -компонента вектора Пойнтинга положительна, а его  $\vartheta$  и  $\varphi$  компоненты равны нулю. Разностная аппроксимация таких условий строится на основе проекции (10) на границу расчетной области. Физически (10) обеспечивают положительный поток энергии из расчетной области, т.е. энергия электромагнитного поля может распространяться только из расчетной области.

### 3 МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для численного решения в конечно-разностных аналогах уравнений (1) и граничных условиях делаем замену  $\mathbf{E} = \alpha\tau_n \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{E}^n$ ,  $\mathbf{H} = \alpha\tau_n \dot{\mathbf{H}} + \mathbf{H}^n$ . В итоге получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно значений производных по времени от компонент электромагнитного поля.

Размерность матрицы такой СЛАУ пропорциональна числу ячеек, на которые разбита расчетная область. Использование прямых методов для решения СЛАУ большой размерности (например поиск обратной матрицы) неэффективно из-за больших вычислительных затрат и неточных результатов в случае плохой обусловленности матрицы. Для матриц такого класса хорошо зарекомендовали себя итерационные методы. Среди итерационных методов наиболее эффективными и устойчивыми являются проекционные методы, особенно тот класс, который использует подпространства Крылова<sup>9,10</sup>. Использование итерационных методов уменьшает затраты по памяти и расчетному времени. Суть этого метода состоит в ортогонализации невязки СЛАУ некому подпространству заданной размерности. В качестве такого подпространства использовалось подпространство Крылова. Размерность базиса выбиралась от 15 до 30. Как показали расчеты, дальнейшее увеличение размерности мало сказывалось на скорости сходимости итерационного решателя. В качестве критерия остановки итераций бралось изменение нормы невязки СЛАУ.

Помимо самого итерационного метода важной частью вычислительной методики является предобуславливание матрицы СЛАУ. Скорость сходимости итерационных методов зависит от спектральных характеристик матрицы<sup>10</sup>. Исходную матрицу СЛАУ умножают на обратную матрицу предобуславливания. Матрица предобуславливания должна быть легко обратима и близка по значениям к матрице СЛАУ. Цель такой операции получить СЛАУ с новой матрицей близкой к единичной и лучшими спектральными характеристиками. Алгоритм получения матрицы предобуславливания основан на неполном Гауссовом исключении. Одним из важных параметров этого



алгоритма является максимально допустимое число ненулевых элементов в строке матрицы предобуславливания. При расчетах этот параметр выбирался от 5 до 15, это обусловлено тем, что матрице СЛАУ число ненулевых элементов в строке не превышает 5 и тем, что увеличение параметра больше 15 не сказывалось на скорости счета. Более подробно эти алгоритмы и их численная реализация изложены в<sup>9</sup>.

Численная реализация итерационного решателя была создана на основе пакетов прикладных программ SPARSKIT<sup>14</sup> и BLAS<sup>15</sup>.

#### 4 ПОСТРОЕНИЕ НЕРЕГУЛЯРНОЙ РАЗНОСТНОЙ СЕТКИ

Использование нерегулярной разностной сетки по пространству позволяет сократить вычислительны затраты и получить более подробную картину распределения электромагнитных полей<sup>12,13</sup>. В данной методике построение такой дискретизации основано на задании дополнительных вычислительных ячеек внутри уже существующих. Используется подход двукратного разбиения вычислительной ячейки по каждому направлению<sup>12</sup>. Для полученных ячеек возможно повторения данной операции, что позволяет получить подробную дискретизацию только в тех точках пространства, где это необходимо.

Рассмотрим подобласть  $\Omega^*$ , состоящую из ячеек с номерами:

$$\left\{ \frac{1}{2} < N_x^{left} + \frac{1}{2} \leq i \leq N_x^{right} - \frac{1}{2} < N_x - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} < N_y^{left} + \frac{1}{2} \leq j \leq N_y^{right} - \frac{1}{2} < N_y - \frac{1}{2}; \right. \\ \left. \frac{1}{2} < N_z^{left} + \frac{1}{2} \leq k \leq N_z^{right} - \frac{1}{2} < N_z - \frac{1}{2} \right\}.$$

Ее граница удалена, как минимум на одну ячейку от границы расчетной области  $\Omega$ . В каждой ячейке  $i+1/2, j+1/2, k+1/2$  подобласти  $\Omega^*$  зададим дополнительные ячейки с размерами  $\frac{\Delta x_{i+1/2}}{2}, \frac{\Delta y_{j+1/2}}{2}, \frac{\Delta z_{k+1/2}}{2}$  (см. рис. 1) с координатами центров и индексами из таблицы 1.

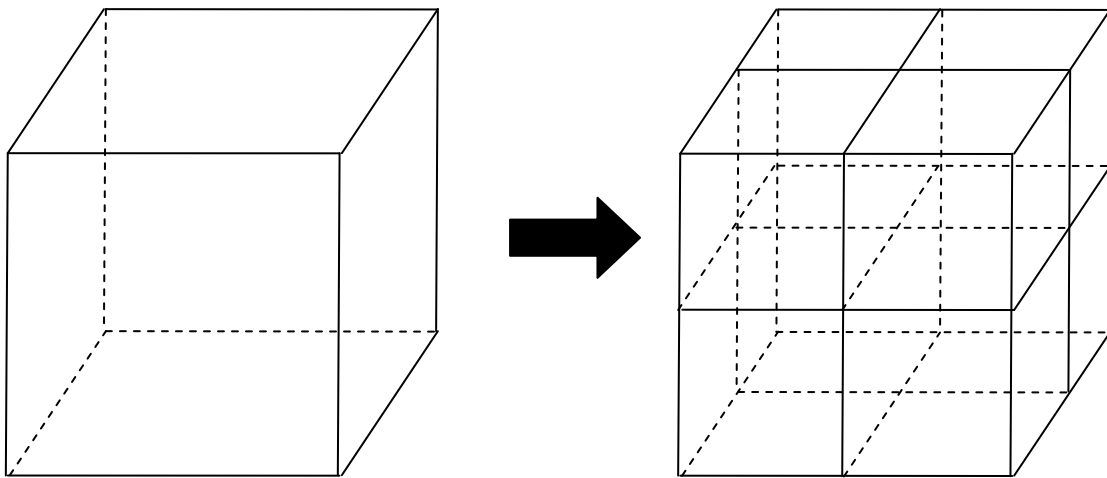


Рис. 1: Трансформация вычислительной ячейки

| Координата центра ячейки   | Индекс ячейки  |
|--|--|
| $x = x_{i+1/2} - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} - \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} - \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{1}{2}, j^* = 2j + \frac{1}{2}, k^* = 2k + \frac{1}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} - \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} + \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{1}{2}, j^* = 2j + \frac{1}{2}, k^* = 2k + \frac{3}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} + \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} - \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{1}{2}, j^* = 2j + \frac{3}{2}, k^* = 2k + \frac{1}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} - \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} + \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} + \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{1}{2}, j^* = 2j + \frac{3}{2}, k^* = 2k + \frac{3}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} + \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} - \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} - \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{3}{2}, j^* = 2j + \frac{1}{2}, k^* = 2k + \frac{1}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} + \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} - \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} + \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{3}{2}, j^* = 2j + \frac{1}{2}, k^* = 2k + \frac{3}{2}$         |
| $x = x_{i+1/2} + \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} + \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} - \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = i \times 2 + \frac{3}{2}, j^* = 2j + \frac{3}{2}, k^* = 2k + \frac{1}{2}$ |
| $x = x_{i+1/2} + \frac{\Delta x_{i+1/2}}{4}, y = y_{j+1/2} + \frac{\Delta y_{j+1/2}}{4}, z = z_{k+1/2} + \frac{\Delta z_{k+1/2}}{4}$ | $i^* = 2i + \frac{3}{2}, j^* = 2j + \frac{3}{2}, k^* = 2k + \frac{3}{2}$         |

Таблица 1: координаты центров и индексы ячеек

Используя соотношения (4) – (6) определим дополнительные сеточные компоненты электромагнитного поля и сеточные значения физических параметров в подобласти  $\Omega^*$  аналогично как это сделано для  $\Omega$ . Определим  $x$ -компоненту плотности тока в подобласти  $\Omega^*$  как средневзвешенное значение плотности тока в области  $\Omega$ :

$$\begin{aligned}
J_{i^*, j^*, k^*}^x &= \left(1 - \frac{\{j^*/2\}}{2}\right) \left(1 - \frac{\{k^*/2\}}{2}\right) J_{[i^*/2]+1/2, [j^*/2], [k^*/2]}^x + \\
&+ \left(1 - \frac{\{j^*/2\}}{2}\right) \left(\frac{\{k^*/2\}}{2}\right) J_{[i^*/2]+1/2, [j^*/2], [k^*/2]+1}^x + \\
&+ \left(\frac{\{j^*/2\}}{2}\right) \left(1 - \frac{\{k^*/2\}}{2}\right) J_{[i^*/2]+1/2, [j^*/2]+1, [k^*/2]}^x + \left(\frac{\{j^*/2\}}{2}\right) \left(\frac{\{k^*/2\}}{2}\right) J_{[i^*/2]+1/2, [j^*/2]+1, [k^*/2]+1}^x,
\end{aligned} \tag{11}$$

где  $[ \ ], \{ \}$  – целая и дробная часть числа соответственно. Для  $y, z$ -компонент плотность тока определяется аналогично. Полученная дискретизация позволяет уточнить численное решение (1) в подобласти  $\Omega^*$  <sup>12,13</sup>.

На границе подобласти  $\Omega^*$  определим сеточные компоненты электрического поля, используя линейную интерполяцию электрического поля от соседних ячеек области  $\Omega$  аналогично (11). Покажем, что эти сеточные компоненты удовлетворяют разностной аппроксимации системы уравнений Максвелла с первым порядком. Рассмотрим границу подобласти  $\Omega^*$  по направлению  $x$  (см. рис. 2).

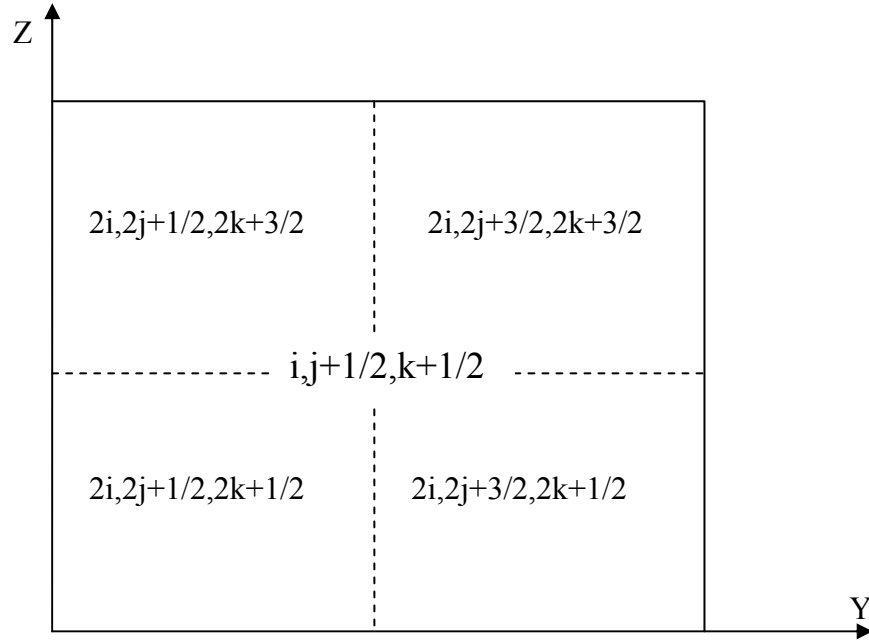


Рис. 2: Граничная ячейка между  $\Omega^*$  и  $\Omega$  по  $x$ -направлению

Разностный аналог уравнения (8) в точке сетки с индексом  $(2i, 2j+1/2, 2k+1/2)$  имеет вид:

$$2\left(E_{2i,2j+1/2,2k+1}^{y*} - E_{2i,2j+1/2,2k}^{y*}\right)/\Delta z_{k+1/2} - 2\left(E_{2i,2j+1,2k+1/2}^{z*} - E_{2i,2j,2k+1/2}^{z*}\right)/\Delta y_{j+1/2} =$$

$$\langle \mu \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \langle e^z \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left(\dot{E}_{2i,2j+1/2,2k}^{y*} + \dot{E}_{2i,2j+1/2,2k+1}^{y*}\right)/2 -$$

$$\langle e^y \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left(\dot{E}_{2i,2j,2k+1/2}^{z*} + \dot{E}_{2i,2j+1,2k+1/2}^{z*}\right)/2,$$

где  $*$  означает, что сеточная функция берется из подобласти  $\Omega^*$ . Подставим интерполированные сеточные значения электрического поля в это уравнение:

$$2\left(\frac{E_{i,j+1/2,k+1}^y + E_{i,j+1/2,k}^y}{2} - E_{i,j+1/2,k}^y\right)/\Delta z_{k+1/2} - 2\left(\frac{E_{i,j+1,k+1/2}^z + E_{i,j,k+1/2}^z}{2} - E_{i,j,k+1/2}^z\right)/\Delta y_{j+1/2} =$$

$$\langle \mu \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \langle e^z \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left(\dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{\dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y + \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y}{2}\right)/2 -$$

$$\langle e^y \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left(\dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{\dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z + \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z}{2}\right)/2.$$

и преобразуем к виду:

$$\left(E_{i,j+1/2,k+1}^y - E_{i,j+1/2,k}^y\right)/\Delta z_{k+1/2} - \left(E_{i,j+1,k+1/2}^z - E_{i,j,k+1/2}^z\right)/\Delta y_{j+1/2} =$$

$$\langle \mu \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \langle e^z \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left(\frac{3}{2}\dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{1}{2}\dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y\right)/2 -$$

$$\langle e^y \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left( \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) / 2.$$

Получим аналогичные соотношения для точек сетки  $(2i, 2j+1/2, 2k+3/2)$ ,  $(2i, 2j+3/2, 2k+1/2)$ ,  $(2i, 2j+3/2, 2k+3/2)$  и просуммируем их:

$$\begin{aligned} & 4(E_{i,j+1/2,k+1}^y - E_{i,j+1/2,k}^y) / \Delta z_{k+1/2} - 4(E_{i,j+1,k+1/2}^z - E_{i,j,k+1/2}^z) / \Delta y_{j+1/2} = \\ & \langle \mu \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \langle \mu \rangle_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^* \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^{x*} + \\ & \langle \mu \rangle_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^* \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^{x*} + \langle \mu \rangle_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^* \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^{x*} + \\ & \frac{1}{2} \left[ \left( \langle e^z \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left( \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y \right) + \right. \right. \\ & \left. \langle e^z \rangle_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^* \left( \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y \right) + \langle e^z \rangle_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^* \left( \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y \right) + \right. \\ & \left. \left. \langle e^z \rangle_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^* \left( \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y \right) \right] - \\ & \frac{1}{2} \left[ \left( \langle e^y \rangle_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^* \left( \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) + \langle e^y \rangle_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^* \left( \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. \langle e^y \rangle_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^* \left( \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) + \langle e^y \rangle_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^* \left( \frac{1}{2} \dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \frac{3}{2} \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z \right) \right]. \end{aligned}$$

Сеточные значения физических параметров среды приписаны центрам ячеек и линейно интерполируются в соответствующие точки сетки. Показано, что линейные комбинации этих значений в подобласти  $\Omega^*$ , стоящие в полученном выражении, аппроксимируют сеточные значения физических параметров с первым порядком в области  $\Omega^{1,5,6}$ . Используя это и разделив полученное выражение на четыре, получим:

$$\begin{aligned} & (E_{i,j+1/2,k+1}^y - E_{i,j+1/2,k}^y) / \Delta z_{k+1/2} - (E_{i,j+1,k+1/2}^z - E_{i,j,k+1/2}^z) / \Delta y_{j+1/2} = \\ & \langle \mu \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} \frac{1}{4} (\dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^{x*}) + \\ & \frac{1}{2} \left[ \left( \langle e^z \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} (\dot{E}_{i,j+1/2,k}^y + \dot{E}_{i,j+1/2,k+1}^y) \right) + \frac{1}{2} \left[ \langle e^y \rangle_{i,j+1/2,k+1/2} (\dot{E}_{i,j,k+1/2}^z + \dot{E}_{i,j+1,k+1/2}^z) \right] \right]. \end{aligned}$$

Полученное выражение отличается от уравнения (8) только производной по времени от сеточной компоненты магнитного поля. Видно, что

$\frac{1}{4} (\dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^{x*} + \dot{H}_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^{x*})$  представляет

средневзвешенное значение  $x$  компоненты магнитного поля в точке  $(i, j+1/2, k+1/2)$  области  $\Omega$ . Будем считать, что таким образом мы определили сеточные значения  $x$  компоненты магнитного поля для узлов регулярной сетки в подобласти  $\Omega^*$ :

$$H_{i,j+1/2,k+1/2}^x = \frac{1}{4} (H_{2i,2j+1/2,2k+1/2}^{x*} + H_{2i,2j+1/2,2k+3/2}^{x*} + H_{2i,2j+3/2,2k+1/2}^{x*} + H_{2i,2j+3/2,2k+3/2}^{x*}). \quad (12)$$

Используя (12), мы показали, что интерполяция сеточных компонент электрического

поля на границе  $\Omega^*$  не нарушает аппроксимации уравнений Максвелла с первым порядком.

## 5 ТЕСТОВАЯ ЗАДАЧА

В тестовой задаче моделировалось воздействие электромагнитные поля диполя на проводящий объект в расчетной области:

$$\{x_{\min} = -100 \text{ см.}, x_{\max} = 200 \text{ см.}, y_{\min} = -100 \text{ см.}, y_{\max} = 100 \text{ см.}, z_{\min} = -100, z_{\max} = 100 \text{ см.}\}$$

Собственное время задается на интервале:  $\{\xi: \xi \in [0, 10^{-8} \text{ с.}]\}$ . В расчетной области  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ . Диполь помещен в точке  $\{x = -50 \text{ см.}, y = 50 \text{ см.}, z = 50 \text{ см.}\}$ , которая совпадает с центром выделенного сферического фронта. Он задается  $z$ -компонентой плотности электрического тока, по формуле:

$$\begin{cases} j^z = 10^8 \sin(2\pi\xi 10^9)(1 - \exp(-10^9 \xi)); & x = -50 \text{ см.}, y = 50 \text{ см.}, |z - 50 \text{ см.}| < 10 \text{ см.} \\ j^x = 0; \end{cases}$$

Объект представляет медную трубу квадратного сечения 20 см. с толщиной стенок 2.5 см. длиной 100 см., расположенную вдоль оси  $x$  в точке  $\{x = 125 \text{ см.}, y = 0 \text{ см.}, z = 0 \text{ см.}\}$ .

Нерегулярная дискретизация строится вблизи объекта на основе регулярной равномерной сетки с параметрами  $\Delta x_{i+1/2} = 10 \text{ см.}$ ,  $\Delta y_{j+1/2} = 10 \text{ см.}$ ,  $\Delta z_{k+1/2} = 10 \text{ см.}$ . Шаг по времени  $10^{-10} \text{ с.}$  Вокруг объекта воздействия была введена нерегулярная сетка с шагом  $\Delta x_{i+1/2} = 2.5 \text{ см.}$ ,  $\Delta y_{j+1/2} = 2.5 \text{ см.}$ ,  $\Delta z_{k+1/2} = 2.5 \text{ см.}$ , т.е. использовалось двукратное разбиение вычислительных ячеек.

Для сравнения был произведен расчет с использованием регулярной дискретизации с аналогичными параметрами разностной сетки. Использование нерегулярной дискретизации позволило уменьшить число вычислительных ячеек на 50% и ускорить вычисления в 2.5 раза.

На рисунках 3 и 4 изображены линии уровня модуля электрического поля генерируемого ЭМИ внутри объекта рассчитанного с использованием нерегулярной и регулярной дискретизации, соответственно.

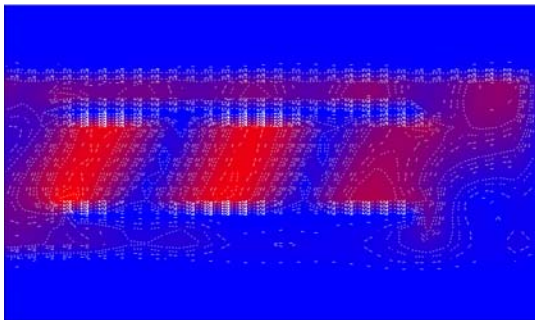


Рис. 3: Распределение электрического поля вокруг объекта (нерегулярная дискретизация)

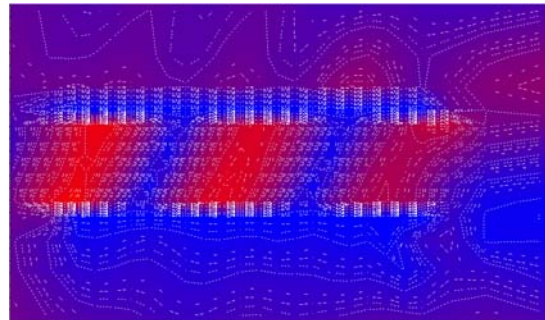


Рис. 4: Распределение электрического поля вокруг объекта (регулярная дискретизация)

Данные, полученные на нерегулярной разностной сетке, приведены только для ячеек самой подробной дискретизации, что позволяет увидеть границу подобласти  $\Omega^*$  вокруг объекта. Сравнение данных показывает, что нерегулярная сетка позволяет достаточно точно получить картину распределения электромагнитного поля в необходимой подобласти.

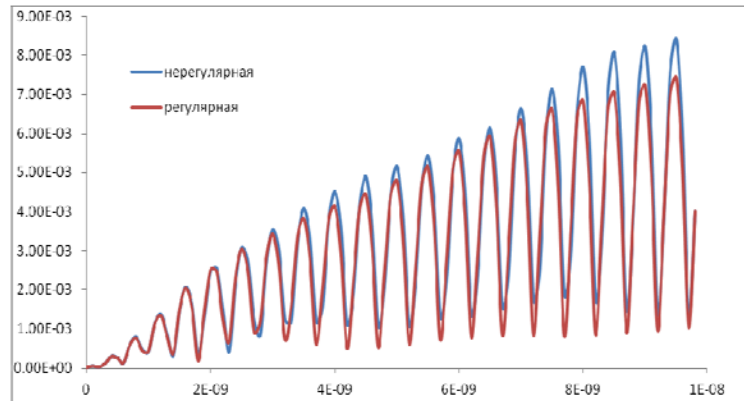


Рис. 5: Зависимость модуля электрического поля от времени внутри объекта воздействия

На рисунке 5 изображена зависимость модуля электрического поля от времени внутри объекта, рассчитанная с использованием регулярной и нерегулярной дискретизаций.

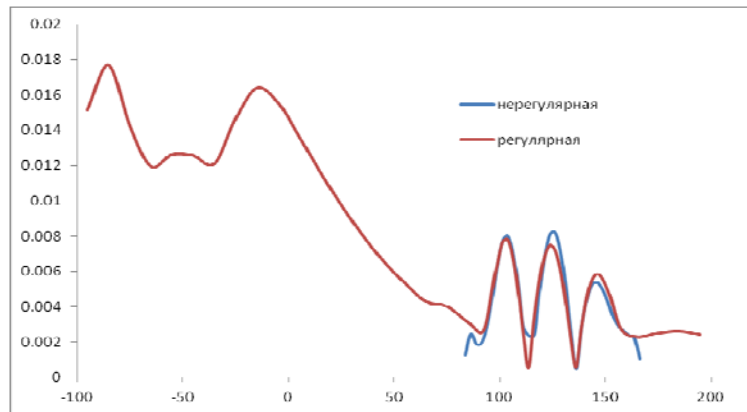


Рис. 6: Зависимость модуля электрического поля от координаты  $x$  в точке  $y = 0 \text{ см.}$ ,  $z = 0 \text{ см.}$  в момент времени  $\xi = 9 \times 10^{-9} \text{ см.}$

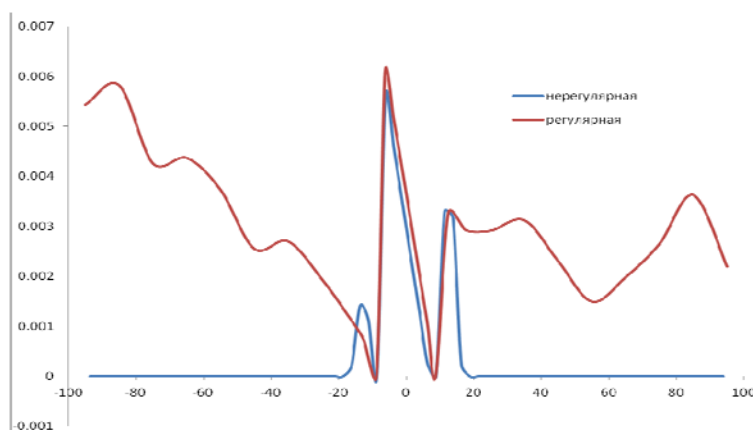


Рис. 7: Зависимость модуля электрического поля от координаты  $z$  в точке  $x = 125\text{см.}$ ,  $y = 0\text{см.}$  в момент времени  $\xi = 9 \times 10^{-9}$  см.

На рисунках 6 и 7 изображена пространственная зависимость модуля электрического поля от различных координат внутри и вне объекта. Эти результаты показывают, что нерегулярная дискретизация обеспечивает точные результаты моделирования при значительном снижении вычислительных затрат по сравнению с регулярной дискретизацией.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тестовые расчеты показали, что разработанный метод применим для моделирования распространения ЭМИ и оценки параметров воздействия ЭМИ на сложные объекты. Использование нерегулярной дискретизации позволяет оптимизировать вычислительные затраты без потери точности. Реализация и применение представленной численной методики возможно на современных высокопроизводительных параллельных компьютерах. В данный момент авторы работают над усовершенствованием распараллеливания предложенной схемы.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] A.V. Berezin, A.A. Kryukov, B.D. Plyushchenkov, *The method of electromagnetic field with the given wave front calculation*, Mathematical Models and Computer Simulations, Vol 23/3, p. 109-126 (2011).
- [2] V. I. Turchaninov, *A numerical technique for solving three-dimensional Maxwell equations in spherical variables in a heterogeneous environment with the given wave front*, Preprint, Inst. Appl. Math., the Russian Academy of Science, 18, Moscow, (1993).
- [3] A.V. Berezin, A.S. Vorontsov, M.B. Markov, B.D. Plyushchenkov, *On the conclusion and decision of maxwell's equations for the problems with given wavefront*, Mathematical Models and Computer Simulations, Vol 18/4, p. 43-60, (2006).
- [4] R. Courant, *Methods of Mathematical Physics*, Moscow, Mir (1964).
- [5] B.D. Plyushchenkov, *A numerical algorithm for calculating the electromagnetic field produced by non-stationary point source of gamma rays above a flat surface of a conducting medium in cylindrical coordinates*, Preprint, Inst. Appl. Math., the Russian Academy of Science, 138, Moscow, (1985).
- [6] .V. Berezin, M.B. Markov, B.D. Plyushchenkov, *Locally one-dimensional finite-difference scheme for the electrodynamic problems with given wavefront*, Preprint, Inst. Appl. Math., the

- Russian Academy of Science, 31, Moscow, (2005).
- [7] A.V. Berezin, A.A. Kryukov, B.D. Plyushchenkov, *Implicit differense scheme for solution of maxwell's equations*, Preprint, Inst. Appl. Math., the Russian Academy of Science, 40, Moscow, (2009).
  - [8] I.E Tamm, *Fundamentals of the theory of electricity*, Moscow, Nauka, (1989).
  - [9] Saad Y.. *Iterative methods for sparse linear systems* (2ed.). SIAM (2000).
  - [10] O. Osterby Z. Zlatev, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Computer Science (1983).
  - [11] Dennis M. Sullivan, *Electromagnetic Simulation Using the FDTD Method, 2nd Edition*, Wiley-IEEE Press (2013).
  - [12] Costas D. Sarris, *Adaptive Mesh Refinement for Time-Domain Numerical Electromagnetics*, Morgan & Claypool (2007).
  - [13] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method, 3rd ed.* Norwood, MA: Artech House (2005).
  - [14] <http://www-users.cs.umn.edu/~saad/software/SPARSKIT/>.
  - [15] <http://www.netlib.org/blas/>.

Поступила в редакцию 10 ноября 2013 года.