ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА ЦРНЕ ГОРЕ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
УНИВЕРЗИТЕТА ЦРНЕ ГОРЕ

# МАТЕМАТИКА ЦРНЕ ГОРЕ

КЊИГА XXVIII

# MATHEMATICA MONTISNIGRI

VOLUME XXVIII

UDK 51 ISSN 0354 2238

ПОДГОРИЦА, 2013.

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVIII (2013) 5-121

# CONTENTS

## Mathematics



## Mathematical modeling



## Computer science applications

MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXVIII (2013) 5-16

# АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

**НИКОЛА МИХАЛЕВИЧ**

Университет Черногории, Морской факультет
Котор, Черногория
e-mail: nikolamih@ac.me

**Ключевые слова:** оператор, характеристическая функция, асимптотика, собственные значения

**Аннотация.** В данной статье обсуждается асимптотика ноль характеристической функции оператора $D^{(2)}$, который генерируется дифференциальным уравнением

$$-y''(x)+q(x)y(\alpha(x))=\lambda y(x)$$

где $0<\alpha(x)<x$, $x\in(0,\pi]$ и $\alpha(0)=0$, $y'(0)-hy(0)=0$ и $y'(\pi)+H(\pi)=0$ - начальные условия. Отыскивается асимптотика ноль, для ранее полученной автором [1] характеристической функции $F$ оператора $D^{(2)}$.

# ASYMPTOTICS OF THE EIGENVALUES OF THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH VARIABLE DELAY

**NIKOLA MIHALJEVICH**

University of Montenegro, Faculty of Marine
Kotor, Montenegro
e-mail: nikolamih@ac.me

**Summary.** This paper discusses the asymptotic behavior of zero characteristic function of the operator $D^{(2)}$, which is generated by the differential equation.

$$-y''(x)+q(x)y(\alpha(x))=\lambda y(x)$$

where $0<\alpha(x)<x$, $x\in(0,\pi]$ and $\alpha(0)=0$, $y'(0)-hy(0)=0$ and $y'(\pi)+H(\pi)=0$ - initial conditions. Sought asymptotic zero for the author earlier [1], the characteristic function of the operator $D^{(2)}$.

**2010 Mathematics Subject Classification: 34B24**.
**Key words and Phrases:** operator, characteristic function, asymptotic behavior, the eigenvalues.

## 1 АСИМПТОТИКА НОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $F$, ЕСЛИ ПОТЕНЦИАЛ ЯВЛЯЕТСЯ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИЕЙ ПО ЛЕБЕГУ

**Теорема 1.** Если $q(x) \in L_1[0,\pi]$, то асимптотика ноль $z_n$ функции $F$ имеет форму

$$z_n = n + \frac{C_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \qquad (n \to \infty) \tag{2}$$

где $C_1 = \dfrac{h+H}{\pi}$ .

**Доказательство.** Применяя основную формулу преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, характеристическую функцию (1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
F(z) &= \left(-z + \frac{hH}{z}\right)\sin \pi z + (h+H)\cos \pi z + \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 + \\
&+ \frac{1}{2z}\Big[H\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 + H\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 + \\
&+ h\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 - h\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1\Big] + \\
&+ \frac{hH}{2z^2}\left[\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 - \int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1\right] + \\
&+ H\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{\frac{1}{z^l}\int_{D_l} Q(T_l)\sin z(\pi - t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1} + \\
&+ \frac{h}{z^{l+1}}\int_{D_l} Q(T_l)\sin z(\pi - t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\Big\} + \\
&+ \sum_{l=2}^{\infty}\Big\{\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1} + \\
&+ \frac{h}{z^l}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\Big\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Из $q(x) \in L_1[0,\pi]$ следует, что $q(x)$ конечна почти всюду на $[0,\pi]$. Вводя обозначение $\pi - t_1 + \alpha(t_1) = t$, получаем $\pi - t = t_1 - \alpha(t_1) = \gamma_1(t_1)$, $t_1 = \gamma_1^{-1}(\pi - t)$ и $dt_1 = -\gamma_1^{-1/}(\pi - t)dt$, тогда

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 &= \int_{\alpha(\pi)}^\pi q(\gamma_1^{-1}(\pi - t))\gamma_1^{-1/}(\pi - t)\cos ztdt = \\
&= \int_{\alpha(\pi)}^\pi \widetilde{q}_1(t)\cos ztdt = o(1), \ (z \to \infty, \ z \in R),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\widetilde{q}_1(t)=q\left(\gamma_1^{-1}(\pi-t)\right)\gamma_1^{-1/}(\pi-t)$. А именно известно, что для произвольной функции $\widetilde{q}\in L_1(\alpha(\pi),\pi)$ применимо

$$\int_{\alpha(\pi)}^{\pi}\widetilde{q}_1(t)\cos ztdt\to 0\quad (z\to\infty).$$

Аналогичным образом можно доказать, что

$$\int_0^{\pi}q(t_1)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1=o(1), \tag{5}$$

$$\int_0^{\pi}q(t_1)\sin z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1=o(1), \tag{6}$$

$$\int_0^{\pi}q(t_1)\sin z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1=o(1). \tag{7}$$

Аналогичным образом для $\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_l)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_l)dT_l$ можно доказать, что

$$\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_l)dT_l=o(1)\ ,\ \ (z\to\infty,\ z\in R).$$

Из предыдущего следует

$$\frac{1}{z^l}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^l}\right),\quad (l=2,3,...). \tag{8}$$

Аналогично

$$\frac{1}{z^{l+1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^{l+1}}\right),\quad (l=2,3,...), \tag{9}$$

$$\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\cos z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^{l-1}}\right),\quad (l=2,3,...), \tag{10}$$

и

$$\frac{1}{z^l}\int_{D_l}Q(T_l)\cos z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^l}\right),\quad (l=2,3,...). \tag{11}$$

На основе отношений (4), (5), (6), (7), (8), (9) и (10) получается асимптотика характеристической функции на вещественной оси

$$F(z)=\left(-z+\frac{hH}{z}\right)\sin\pi z+(h+H)\cos\pi z+o(1),\quad (z\to\infty,\ z\in R). \tag{12}$$

Из (12) видно, что при достаточно больших по модулю значениях нулевой функции значения функции $F(z)$ приближаются к целым значениям. Поэтому нули характеристической функции $F$ (для достаточно больших $n$) отыскиваем в форме

$$z_n = n + \frac{\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Тогда

$$\sin\pi z_n = \sin\pi\left(n + \frac{\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n \frac{\pi\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\cos\pi z_n = \sin\pi\left(n + \frac{\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = (-1)^n \cos\left(\frac{\overline{C}_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n\left(1 - \frac{\overline{C}_1^2\pi^2}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = (-1)^n + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$-z_n \sin\pi z_n = (-1)^{n+1}\overline{C}_1\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\frac{hH}{z_n}\sin\pi z_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если $F(z_n) = 0$, получим

$$(-1)^{n+1}\pi\overline{C}_1 + (-1)^n(h + H) = 0.$$

Откуда

$$\overline{C}_1 = \frac{h + H}{\pi} = C_1$$

и

$$z_n = n + \frac{C_1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

## 2 АСИМПТОТИКА НОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $F$, ЕСЛИ ПОТЕНЦИАЛ АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

**Теорема 2.** Если $q(x)$ абсолютно непрерывная функция, тогда асимптотика ноль $z_n$ функции $F$ имеет форму

$$z_n = n + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{13}$$

где
$$C_2 = \frac{\tilde{q}_2(\pi) - \tilde{q}_1(\pi)}{2\pi}$$

и
$$\tilde{q}_1(t_1) = \frac{q(t_1)}{\alpha'(t_1) - 1}, \qquad \tilde{q}_2(t_1) = \frac{q(t_1)}{-\alpha'(t_1) - 1}.$$

**Доказательство**. Пусть
$$I_1(z) = \int_0^\pi q(t_1) \cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1$$

и
$$I_2(z) = \int_0^\pi q(t_1) \cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 .$$

Методом интегрирования по частям, получаем
$$I_1(z) = \frac{\tilde{q}_1(\pi) \sin z\alpha(\pi)}{z} - \frac{\tilde{q}_1(0) \sin z\pi}{z} - \frac{1}{z} I_1'(z), \tag{14}$$
$$I_2(z) = \frac{\tilde{q}_2(\pi) \sin z\alpha(\pi)}{z} - \frac{\tilde{q}_2(0) \sin z\pi}{z} - \frac{1}{z} I_2'(z), \tag{15}$$

где
$$I_1'(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_1'(t_1) \sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1)) dt_1 ,$$
$$I_2'(z) = \int_0^\pi \tilde{q}_2'(t_1) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1)) dt_1 .$$

Из абсолютной непрерывности функции $q(x)$ следует, что $q'(x) \in L_1[0,\pi]$, и из доказательства теоремы 1, следуют оценки
$$I_1'(z) = o(1), \qquad I_2'(z) = o(1), \qquad (z \to \infty,\ z \in R). \tag{16}$$

Также, на основе доказательства этой теоремы
$$\frac{1}{z^l} \int_{D_l} Q(T_l) \sin z(\pi - t_1) P(T_l, z) \cos z\alpha(t_l) dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+1}}\right), \quad (l = 2,3,...). \tag{17}$$

$$\frac{1}{z^{l+1}} \int_{D_l} Q(T_l) \sin z(\pi - t_1) P(T_l, z) \sin z\alpha(t_l) dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+2}}\right), \quad (l = 2,3,...), \tag{18}$$

$$\frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) \cos z(\pi - t_1) P(T_l, z) \cos z\alpha(t_l) dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l}}\right), \quad (l = 2,3,...), \tag{19}$$

$$\frac{1}{z^l}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_l)dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+1}}\right), \quad (l=2,3,...) \tag{20}$$

и

$$\frac{1}{z}\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1 = o\left(\frac{1}{|z|}\right), \tag{21}$$

$$\frac{1}{z}\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1 = o\left(\frac{1}{|z|}\right). \tag{22}$$

Из (14), (15), (16), (17), (18), (19), (20), (21) и (22) мы получаем следующее асимптотическое развитие характеристической функций $F$ на вещественной оси

$$F(z)=\left(-z+\frac{hH}{z}\right)\sin\pi z+(h+H)\cos\pi z+\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{q}_1(\pi)\sin z\alpha(\pi)}{z}-\right.$$

$$\left.-\frac{\tilde{q}_1(0)\sin z\pi}{z}-\frac{\tilde{q}_2(\pi)\sin z\alpha(\pi)}{z}-\frac{\tilde{q}_2(0)\sin z\pi}{z}\right)+o\left(\frac{1}{z}\right), \quad (z\to\infty,\ z\in R) \tag{23}$$

Асимптотику нуля функции $F(z)$ отыскиваем в форме

$$z_n = n+\frac{\overline{C}_1}{n}+\frac{\overline{C}_2}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

При достаточно большом $n$ получим

$$\sin\pi z_n = (-1)^n\left(\frac{\overline{C}_1\pi}{n}+\frac{\overline{C}_2\pi}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$-z_n\sin\pi z_n = (-1)^{n+1}\left(\pi C_1+\frac{\pi\overline{C}_2}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\sin\pi z_n}{z_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\frac{\sin z_n\alpha(\pi)}{z_n} = \frac{1}{n+\frac{\overline{C}_1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\sin\left[\left(n+\frac{\overline{C}_1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\alpha(\pi)\right]=$$

$$=\frac{1}{n+\frac{\overline{C}_1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}\left(\sin n\alpha(\pi)\cos\frac{\overline{C}_1}{n}\alpha(\pi)+\cos n\alpha(\pi)\sin\frac{\overline{C}_1}{n}\alpha(\pi)\right)=$$

$$=\frac{\sin n\alpha(\pi)}{n}+\frac{\overline{C}_1\alpha(\pi)\cos n\alpha(\pi)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)=$$

$$= \frac{\sin n\alpha(\pi)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\sin n\alpha(\pi)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Предпосылка $F(z_n) = 0$ приводит к уравнениям

$$(-1)^{n+1}\pi\,\overline{C_1} + (-1)^n (h + H) = 0,$$

$$(-1)^{n+1}\pi\,\overline{C_2} + \frac{\tilde{q}_1(\pi) - \tilde{q}_2(\pi)}{2}\sin n\alpha(\pi) = 0.$$

Тогда $\overline{C_1} = C_1$, где $C_1$ определено в (2). Далее

$$\overline{C_2} = \frac{\tilde{q}_2(\pi) - \tilde{q}_1(\pi)}{2\pi}(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi) = C_2(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)$$

и

$$z_n = n + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

## 3 АСИМПТОТИКА НОЛЬ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ $F$, ЕСЛИ ПРОИЗВОДНАЯ ПОТЕНЦИАЛА АБСОЛЮТНО НЕПРЕРЫВНАЯ ФУНКЦИЯ

**Теорема 3.** Еслы $q'(x)$ абсолютно непрерывная функция, тогда асимптотика ноль $z_n$ функции $F$ имеет форму

$$z_n = n + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n^2} + \frac{C_3^{(0)} + C_3^1(-1)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{24}$$

где

$$\tilde{\tilde{q}}_1(t_1) = \frac{\tilde{q}_1'(t_1)}{\alpha'(t_1) - 1},\quad \tilde{\tilde{q}}_2(t_1) = \frac{\tilde{q}_2'(t_1)}{-\alpha'(t_1) - 1},$$

$$C_3^{(0)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3 C_1^3}{6} - \pi C_1^2 + \pi C_1 hH - \frac{1}{2}(h + H)\pi^2 C_1^2 - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(0) + \tilde{\tilde{q}}_2(0)}{2} - \right.$$

$$\left. - C_1\pi\frac{\tilde{q}_1(0) + \tilde{q}_2(0)}{2} + \frac{H + h}{2}\tilde{q}_1(0) + \frac{H - h}{2}\tilde{q}_2(0)\right),$$

$$C_3^{(0)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\tilde{q}_2(\pi) - \tilde{q}_1(\pi)}{2}C_1\alpha(\pi) - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(\pi) + \tilde{\tilde{q}}_2(\pi)}{2} + \frac{H + h}{2}\tilde{q}_1(\pi) + \frac{H - h}{2}\tilde{q}_2(\pi)\right).$$

**Доказательство**. Пусть $I_1(z)$, $I_2(z)$, $I_1'(z)$ и $I_2'(z)$ интегралы от предыдущей теоремы. Методом интегрирования по частям мы получаем

$$-I_1(z) = \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z} - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(0)\cos z\pi}{z} - \frac{1}{z}I_1''(z),$$

$$-I_2(z)=\frac{\tilde{\tilde{q}}_2(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z}-\frac{\tilde{\tilde{q}}_2(0)\cos z\pi}{z}-\frac{1}{z}I_2''(z), \tag{25}$$

где

$$I_1''(z)=\int_0^\pi \tilde{\tilde{q}}_1'(t_1)\cos z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1,$$

$$I_2''(z)=\int_0^\pi \tilde{\tilde{q}}_1'(t_1)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1.$$

Из абсолютной непрерывности $q'(x)$ следует что $q''(x)\in L_1[0,\pi]$. Следовательно

$$I_1''(z)=o(1),\qquad I_2''(z)=o(1),\qquad (z\to\infty,\ z\in R).$$

Пусть

$$I_3(z)=\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1,$$

$$I_4(z)=\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1. \tag{26}$$

Тогда интегрированием по частям, получаем

$$I_3(z)=\frac{-\tilde{q}_1(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z}+\frac{\tilde{q}_1(0)\cos z\pi}{z}+\frac{1}{z}I_3'(z),$$

$$I_4(z)=\frac{-\tilde{q}_2(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z}+\frac{\tilde{q}_2(0)\cos z\pi}{z}+\frac{1}{z}I_4'(z), \tag{27}$$

где

$$I_3'(z)=\int_0^\pi \tilde{q}_1'(t_1)\cos z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1,$$

$$I_2'(z)=\int_0^\pi \tilde{q}_2'(t_1)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1.$$

Для $I_3'(z)$ и $I_4'(z)$ имеем

$$I_3'(z)=o(1),\qquad I_4'(z)=o(1),\qquad (z\to\infty,\ z\in R). \tag{28}$$

Также

$$\frac{1}{z^l}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^{l+2}}\right),\quad (l=2,3,\ldots). \tag{29}$$

$$\frac{1}{z^{l+1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_l)dT_l=o\left(\frac{1}{|z|^{l+3}}\right),\quad (l=2,3,\ldots), \tag{30}$$

$$\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l, z)\cos z\alpha(t_l)dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+1}}\right), \quad (l = 2,3,...), \tag{31}$$

$$\frac{1}{z^{l}}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l, z)\sin z\alpha(t_l)dT_l = o\left(\frac{1}{|z|^{l+2}}\right), \quad (l = 2,3,...) \tag{32}$$

На основе (25), (26), (27), (28), (29), (30), (31) и (32) получаем асимптотику характеристической функции на вещественной оси

$$F(z) = \left(-z + \frac{hH}{z}\right)\sin \pi z + (h+H)\cos \pi z + \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{q}_1(\pi)\sin z\alpha(\pi)}{z} - \right.$$

$$-\frac{\tilde{q}_1(0)\sin z\pi}{z} + \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z^2} - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(0)\cos z\pi}{z^2} - \frac{\tilde{q}_2(\pi)\sin z\alpha(\pi)}{z} - ,$$

$$\left. -\frac{\tilde{q}_2(0)\sin z\pi}{z} + \frac{\tilde{\tilde{q}}_2(\pi)\cos z\alpha(\pi)}{z^2} - \frac{\tilde{\tilde{q}}_2(0)\cos z\pi}{z^2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2z^2}\left[(h+H)\left(-\tilde{q}_1(\pi)\cos z\alpha(\pi) + \tilde{q}_1(0)\cos z\pi\right) + \right.$$

$$\left. + (H-h)\left(-\tilde{q}_2(\pi)\cos z\alpha(\pi) + \tilde{q}_2(0)\cos z\pi\right)\right] + o\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (z \to \infty,\ z \in R). \tag{33}$$

Асимптотику ноль функции $F(z)$ будем искать в форме

$$z_n = n + \frac{\overline{C}_1}{n} + \frac{\overline{C}_2}{n^2} + \frac{\overline{C}_3}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

При достаточно больших целых значениях по модулю $n$ получаем

$$\sin \pi z_n = (-1)^n\left(\frac{\pi\overline{C}_1}{n} + \frac{\pi\overline{C}_2}{n^2} + \frac{\pi\overline{C}_3 - \frac{\pi^3}{6}\overline{C}_1^3}{n^3}\right) + o\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

$$-\sin \pi z_n = (-1)^{n+1}\left(\pi\overline{C}_1 + \frac{\pi\overline{C}_2}{n} + \frac{\pi\overline{C}_1^2 + \pi\overline{C}_3 - \frac{\pi^3}{6}\overline{C}_1^3}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\cos \pi z_n = (-1)^n\left(1 - \frac{\pi^2\overline{C}_1^2}{2n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{\sin \pi z_n}{z_n} = (-1)^n\frac{\pi\overline{C}_1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$I_1(z_n) = \frac{\tilde{q}_1(\pi)\sin n\alpha(\pi)}{n} +$$

$$+\frac{\overline{C}_1\tilde{q}_1(\pi)\alpha(\pi)\cos n\alpha(\pi)+\tilde{\tilde{q}}_1(\pi)\cos n\alpha(\pi)-(-1)^n\overline{C}_1\pi\,\tilde{q}_1(0)-(-1)^n\tilde{\tilde{q}}_1(0)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$I_2(z_n)=\frac{-\tilde{q}_1(\pi)\sin n\alpha(\pi)}{n}+$$

$$+\frac{-\overline{C}_1\tilde{q}_2(\pi)\alpha(\pi)\cos n\alpha(\pi)+\tilde{\tilde{q}}_2(\pi)\cos n\alpha(\pi)-(-1)^n\overline{C}_1\pi\,\tilde{q}_2(0)-(-1)^n\tilde{\tilde{q}}_2(0)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$I_3(z_n)=\frac{-\tilde{q}_1(\pi)\cos n\alpha(\pi)}{n}+\frac{(-1)^n\tilde{q}_1(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$I_4(z_n)=\frac{-\tilde{q}_2(\pi)\cos n\alpha(\pi)}{n}+\frac{(-1)^n\tilde{q}_2(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Из приведенних выше формул, а также и формулы (33) имеем

$$F(z_n)=(-1)^{n+1}\left(\pi\overline{C}_1+\frac{\pi\overline{C}_2}{n}+\frac{\pi\overline{C}_1^{\,2}+\pi\overline{C}_3-\frac{\pi^3}{6}\overline{C}_1^{\,3}}{n^2}\right)+(-1)^n\frac{\pi\overline{C}_1hH}{n^2}+$$

$$+(-1)^n(h+H)\left(1-\frac{\pi^2\overline{C}_1^{\,2}}{2n^2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{q}_1(\pi)-\tilde{q}_2}{n}\sin n\alpha(\pi)+\right.$$

$$+\frac{\overline{C}_1(\tilde{q}_1(\pi)-\tilde{q}_2(\pi))\alpha(\pi)\cos n\alpha(\pi)+\left(\tilde{\tilde{q}}_1(\pi)+\tilde{\tilde{q}}_2(\pi)\right)\cos n\alpha(\pi)}{n^2}+$$

$$\left.+\frac{(-1)^{n+1}\overline{C}_1\pi(\tilde{q}_1(0)+\tilde{q}_2(0))+(-1)^{n+1}\left(\tilde{\tilde{q}}_1(0)+\tilde{\tilde{q}}_2(0)\right)}{n^2}\right)+$$

$$+\frac{H+h}{2n}\cdot\frac{-\tilde{q}_1(\pi)\cos n\alpha(\pi)+(-1)^n\tilde{q}_1(0)}{n}+$$

$$+\frac{H-h}{2n}\cdot\frac{-\tilde{q}_2(\pi)\cos n\alpha(\pi)+(-1)^n\tilde{q}_2(0)}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Равенство $F(z_n)=0$ приводит к уравнениям

$$(-1)^{n+1}\pi\overline{C}_1+(-1)^n(h+H)=0,$$

$$(-1)^{n+1}\pi\overline{C}_2+\frac{\tilde{q}_1(\pi)-\tilde{q}_2(\pi)}{2}\sin n\alpha(\pi)=0,$$

$$(-1)^{n+1}\pi\overline{C}_3-\frac{(-1)^{n+1}\pi^3}{6}\overline{C}_1^{\,3}+$$

$$+\left(-1\right)^{n+1}\pi\overline{C}_1-\left(-1\right)^{n+1}\pi\overline{C}_1 hH+\left(-1\right)^{n+1}\left(h+H\right)\frac{\pi^2\overline{C}_1^2}{2}+$$

$$+\frac{\overline{C}_1\left(\tilde{q}_1(\pi)-\tilde{q}_2(\pi)\right)\alpha(\pi)\cos na(\pi)+\left(\tilde{\tilde{q}}_1(\pi)+\tilde{\tilde{q}}_2(\pi)\right)\cos n\alpha(\pi)}{2}+$$

$$+\frac{\left(-1\right)^{n+1}\overline{C}_1\pi\left(\tilde{q}_1(0)+\tilde{q}_2(0)\right)+\left(-1\right)^{n+1}\left(\tilde{\tilde{q}}_1(0)+\tilde{\tilde{q}}_2(0)\right)}{2}+$$

$$+\left(H+h\right)\frac{-\tilde{q}_1(\pi)\cos n\alpha(\pi)+\left(-1\right)^n\tilde{q}_1(0)}{2}+$$

$$+\left(H-h\right)\frac{-\tilde{q}_2(\pi)\cos n\alpha(\pi)+\left(-1\right)^n\tilde{q}_2(0)}{2}=0.$$

Тогда

$$\overline{C}_1=C_1,\qquad \overline{C}_2=C_2\left(-1\right)^{n+1}\sin n\alpha(\pi),$$
$$\overline{C}_3=C_3^{(0)}+C_3^{(1)}\left(-1\right)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)$$

и

$$z_n=n+\frac{C_1}{n}+\frac{C_2\left(-1\right)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n^2}+\frac{C_3^{(0)}+C_3^{1}\left(-1\right)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

## 4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Из полученной асимптотики ноль функции $F$ соответственно асимптотики собственных оценок оператора $D^{(2)}$ видно, что с увеличением уровня гладкости потенциала $q$, а также уровня гладкости функции задержки $\alpha$ обеспечивается уточнение асимптотического разложения собственных значений оператора $D^{(2)}$. Этот факт имеет значение при установлении соотношения между параметрами оператора $D^{(2)}$ с одной стороны и параметров асимптотики собственных значений, с другой стороны.

## REFERENCES


[1] N.Mihaљeviħ, M.Pikula, Karakteristichna funktsija operatora tipa Shturm-Liuvila sa promenљivim kashњeњem, *Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru*, br. 20 (2003), 403-410.

[2] S.B. Norkin, *Differentsial'nye uravneniya vtorogo poryadka s zapazdyvayuschim argumentom*, Nauka, Moskva, 1965

[3] I.M. Gel'fand, B.M.Levitan, Ob opredelenii differentsial'nogo uravneniya po ego spektral'noi funktsii, *Izv. AN SSSR, Ser. Mat*.-1951, -T.15.-S.309-360.

[4] L.E. El'sgol'ts, S.B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nyh uravnenii s otklonyayuschimsya argumentom*, Nauka, Moskva, 1971

[5] R.Lazović, M.Pikula, *Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems*, Radovi matematički, 2002.

[6] M. Pikula, Ob opredelenii differentsial'nogo uravneniya s peremennym zapazdyvaniem, *Mathematica Montisnigri*, Vol VI (1996), 71-91
[7] M. Pikula, Opredelenie differentsial'nogo operatora Shturma-Liuvillya s zapazdyvayuschim argumentom po dvum spektram, *Matematicheskii vestnik*, 43 (1991), 159-171
[8] R.Lazoviћ, Konstruktsija operatora tipa Shturma-Liuvila sa kashњeњem, *Doktorska disertatsija*, Beograd 1998
[9] N.Mihaljevich, A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic, *Mathematica Montisnigri*, Vol XX-XXI (2007-2008), 15-34
[10] N.Mihaljevich, M.Pikula, The inverse Sturm-Liouville problem with changeable delay, *Mathematica Montisnigri*, Vol XVI (2003), 41-68
[11] V.A. Sadovnichii, *Teoriya operatorov*, Moskva, MGU, 1979
[12] N.Levinson, The inverse Sturm-Liouville problem. *Math. Tidsskr.* 13 (1949), 25-30

Поступила в редакцию 15 июля 2013 года.