MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXX (2014) 17-24

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ И ДЖРБАШЯНА

Р.В. ДАЛЛАКЯН*

* Государственный инженерный университет Армении
Ереван, Армения
e-mail: dallakyan57@mail.ru

Ключевые слова: Оператор интегродифференцирования Римана-Лиувилля, произведение Бляшке, произведение Джрбашяна, ядра Джрбашяна типа Коши, Шварца и Пуассона

Аннотация. В Пользуясь аппаратом интегродифференцирования Римана-Лиувилля, М. М. Джрбашян ([1], гл. IX) обобщил класс мероморфных в единичном круге функций Р. Неванлинны, вводя также произведения $B_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, которые в специальном случае $\alpha=0$ совпадают с произведениями Бляшке. При $-1<\alpha<0$ М. М. Джрбашяну и В. С. Захаряну удалось установить взаимосвязь между произведениями B_α и B Бляшке.

В настоящей заметке,пользуясь этой связью, а также свойствами аппарата интегродифференцирования Римана-Лиувилля, удалось доказать предельные соотношения для произведений B и B_α. Далее, получено условие принадлежности произведения Бляшке классу $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$.

SOME LIMIT RELATIONS OF BLASCHKE AND DJRBASHYAN PRODUCTS

R. DALLAKYAN*

* State Engineering University of Armenia
Yerevan, Armenia
e-mail: dallakyan57@mail. ru

Summary. Using Riemann-Liouville integrodifferentation, M. M. Djrbashyan in [1] (ch. IX) generalized R. Nevanlinna's class of meromorphic functions in the unit disk and introduced $B_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ product which in the special case $\alpha=0$ coincide with Blaschke product B. M. M. Djrbashyan and V. S. Zakaryan have found connection of B_α and Blaschke product B in case of $-1<\alpha<0$.

Limit relations of products B and B_α are proved in this paper using this connection and Riemann-Liouville integrodifferentation. The condition under which Blaschke product belongs to class $A_\alpha\left(-1<\alpha\le 0\right)$ is also found.

2010 Mathematics Subject Classification: 30J10, 31A20, 32A35.
Key words and Phrases: Riemann-Liouville, integrodifferentation operator, Blaschke product, Djrbashyan product, Cauchy, Schwartz and Poisson's type Djrbashyan kernels.

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть $0 < l < +\infty$ и пусть $f(x)$ - произвольная функция из класса $L(0,l)$. Интегралом от $f(x)$ порядка $\alpha(0 < \alpha < +\infty)$ с началом в точке $x = 0$ принято называть функцию

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt, x \in (0,l).$$

Для $\alpha = 0$ определяется

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Если же $-1 < \alpha < 0$, то оператор $D^{-\alpha}$ определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{d}{dx}\left\{D^{-(1+\alpha)} f(x)\right\}.$$

Пусть $\mathbb{D} = \{z; |z| < 1\}$- единичный круг комплексной плоскости. М. М. Джрбашяном (см. [1], стр. 576) были введены следующие ядра:

$$C_\alpha(z) = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}},\ z \in \mathbb{D},$$

$$S_\alpha(z) = 2C_\alpha(z) - C_\alpha(0) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\},\ \ z \in \mathbb{D},$$

$$P_\alpha(\varphi; r) = \operatorname{Re} S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\operatorname{Re}\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\},\ \ 0 \le r < 1.$$

Известные из теории функций ядра Коши, Шварца и Пуассона получаются из введенных выше функций при $\alpha = 0$. М. М. Джрбашяном доказано, что

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} C_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = C_0\left(re^{i\varphi}\right),$$
$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} S_\alpha\left(re^{i\varphi}\right) = S_0\left(re^{i\varphi}\right),$$
$$r^{-\alpha} D^{-\alpha} P_\alpha(\varphi; r) = P_0(\varphi; r).$$

Пусть $\{z_n\} \in \mathbb{D}$- произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей, такая что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - |z_n|\right)^{1+\alpha} < +\infty \tag{1}$$

Произведение М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z;\{z_n\}), -1 < \alpha < +\infty$, определяется следующим образом:

$$B_\alpha(z;\{z_n\}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)e^{-W_\alpha(z, z_n)},$$

где

$$W_\alpha(z,\xi)=\int_{|\xi|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+n)}\left\{\xi^{-n}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{n-1}dx-\bar{\xi}^n\int_{|\xi|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-n-1}dx\right\}z^n, z\in\mathbb{D},\xi\in\mathbb{D}.$$

В специальном случае $\alpha=0$ произведения М. М. Джрбашяна превращаются в произведения Бляшке:

$$B_0(z;\{z_n\})=B(z;\{z_n\})=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{z_n-z}{1-\bar{z}_n z}\frac{|z_n|}{z_n}.$$

Известно, что справедливы следующие утверждения (см. [2], стр.72)

1. $\left|B(z;\{z_n\})\right|<1,\ z\in\mathbb{D}$.
2. $\lim\limits_{r\to1-0}\left|B(re^{i\varphi};\{z_n\})\right|=1$ для почти всех $\varphi\in[0,2\pi]$.

Для произведений $B_\alpha(z;\{z_n\}), -1<\alpha<0$, аналог утверждения 1 доказан В. С. Захаряном [3].Им доказано, что если $-1<\alpha<0$ и $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$,любая последовательность,удовлетворяющая условию (1), то

$$\left|B_\alpha(z;\{z_n\})\right|\le\left|B(z;\{z_n\})\right|\exp\left\{\frac{\alpha}{2+\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}dx\right\}. \qquad (2)$$

Аналог же утверждения 2 для произведений $B_\alpha(z;\{z_n\})$, $-1<\alpha<+\infty$, доказан М. М. Джрбашяом. А именно им доказано, что для любого сходящегося произведения $B_\alpha(z;\{z_n\})$, $-1<\alpha<+\infty$, справедливо предельное соотношение (см. [1], стр. 626)

$$\lim_{r\to1-0}\int_0^{2\pi}\left\{D^{-\alpha}\log\left|B_\alpha(re^{i\varphi};\{z_n\})\right|\right\}d\varphi=0 \qquad (3)$$

В специальном случае $\alpha=0$ последнее равенство переходит в известное равенство

$$\lim_{r\to1-0}\int_0^{2\pi}\log\left|B(re^{i\varphi};\{z_n\})\right|d\varphi=0.$$

В. С. Захаряном в [4] доказано, что если для данного $\varphi\in[0,2\pi]$ выполняется условие типа Фростмана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|}{\left|e^{i\varphi}-z_n\right|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha<0, \qquad (4)$$

то в точке $e^{i\varphi}$ произведение $B_\alpha(z;\{z_n\})$ имеет конечное радиальное изменение. Это означает, что

$$\lim_{r\to1-0}B_\alpha(re^{i\varphi};\{z_n\})=B_\alpha(e^{i\varphi};\{z_n\})$$

существует и конечен. В [5] (стр. 94) показано, что соотношение (4) может нарушаться лишь на некотором исключительном множестве $E,(\alpha+1)$ - емкость которого равна нулю. В работе [4] В.С. Захаряном также доказано, что при выполнении условии (4) существует q такое, что

$$\lim_{r\to 1-0}\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right| = \left|B_\alpha\left(e^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right| \geq q > 0\,. \tag{5}$$

Таким образом, неравенство (5) также может нарушаться лишь на некотором исключительном множестве, $(\alpha+1)$ - емкость которого равна нулю.

М. М. Джрбашян и В. С. Захарян (см. [6]) установили следующую взаимосвязь между произведениями $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$, $-1<\alpha<0$ и $B\left(z;\{z_n\}\right)$ с нулями, удовлетворяющими условию (1):

$$B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right) = B\left(z;\{z_n\}\right)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\}, \tag{6}$$

где $\omega(\theta)$ - невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$, имеющая вид

$$\omega(\theta) = \lim_{n\to\infty}\int_0^\theta D^{-\alpha}\log\left|\frac{B_\alpha\left(r_n e^{i\theta};\{z_n\}\right)}{B\left(r_n e^{i\theta};\{z_n\}\right)}\right|d\theta \tag{7}$$

$$\left(0<r_1<r_2<\ldots<r_n<\ldots, r_n\uparrow 1\right).$$

В [1] (стр. 655) М. М. Джрбашяном введены классы $A_\alpha\,(-1<\alpha<+\infty)$ как множество всех аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ функций, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi\right\} < +\infty\,,$$

где, как обычно

$$D_{(+)}^{-\alpha}\varphi(r) = \begin{cases} D^{-\alpha}\varphi(r), \textit{если } D^{-\alpha}\varphi(r)\geq 0 \\ 0, \qquad \textit{если } D^{-\alpha}\varphi(r)\leq 0. \end{cases}$$

Отметим, что справедливы следующие включения:

$$A_{\alpha_1}\subset A_{\alpha_2}, -1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty\,.$$

$$A_\alpha\subset A_0, -1<\alpha<0\,.$$

$$A_0\subset A_\alpha, 0<\alpha<+\infty\,.$$

Нетрудно убедиться, что класс A_0 совпадает с классом A Островского - Неванлинны (см. [2], стр.82, [7], пункт. 160).

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сначала докажем аналогичное (3) предельное соотношение для произведений $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$.

Теорема 1. Пусть $-1<\alpha<+\infty$ и пусть $\{z_n\}\in\mathbb{D}$ - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|d\varphi=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}dx\,. \tag{8}$$

Доказательство. Из формулы Йенсена имеем (см. [8])

$$\int_0^{2\pi}\log\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|d\varphi=\log\left|B_\alpha(0)\right|+\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|}\,.$$

Отсюда, так как

$$B_\alpha(0)=exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx\right),$$

то получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|d\varphi=-\sum_{n=1}^{\infty}\int_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{n=1}^{\infty}\log|z_n|\,. \tag{9}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log|z_n|=-\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1-\left(1-|z_n|\right)\right)$$

сходится, если выполняется условие (1). Для этого достаточно показать, что функция

$$y=\log(1-x)-x^{\alpha+1},\ x\in[0,1)$$

является монотонно убывающей функцией, а это очевидно. Из предельного соотношения (9) следует справедливость утверждения теоремы.

Замечание 1. Если в (8) параметр α стремится к нулю, то получается известное предельное соотношение для произведений Бляшке:

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|d\varphi=0\,.$$

Замечание 2. Интересным является и тот факт, что в правой части предельного соотношения (8) появился тот же ряд, что и в экспоненте правой части неравенства (2) В. С. Захаряна.

Далее исследуется следующая задача: каким будет предел (3), если оператор $r^{-\alpha}D^{-\alpha}$ - Римана-Лиувилля применять на произведение Бляшке с нулями, удовлетворяющими условию (1). Здесь естественно предполагать, что $-1<\alpha\le 0$, чтобы произведение Бляшке сходилось.

Теорема 2. Пусть $-1<\alpha\le 0$ и пусть $\{z_n\}\subset \mathbb{D}$ - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi=-\int_0^{2\pi}d\omega_\alpha(\theta),$$

где $\omega(\theta)$ - определенная в (7) невозрастающая функция конечной вариации на $[0,2\pi]$.

Доказательство. Когда $\alpha=0$, то оператор $r^{-\alpha}D^{-\alpha}$ является тождественным оператором, а $\omega_0(\theta)=0$ везде на $[0,2\pi]$, кроме, быть может, некоторого счетного множества. Так что получается следующий известный результат:

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|d\varphi=0 .$$

Теперь пусть $-1<\alpha<0$. Пользуясь соотношением (6) о связи произведений $B_\alpha\left(z;\{z_n\}\right)$ и $B\left(z;\{z_n\}\right)$, вычислим

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi=\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi-$$

$$-\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega_\alpha(\theta)\right]\right\}d\varphi .$$

Отсюда, учитывая предельное соотношение (3) и тот факт, что $\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)=P_\alpha(\varphi-\theta;r)$, получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi=-\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_\alpha(\varphi-\theta;r)\,d\omega_\alpha(\theta)\right]\right\}d\varphi=$$

$$=-\lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}r^{-\alpha}D^{-\alpha}P_\alpha(\varphi-\theta;r)\,d\omega_\alpha(\theta)\right\}d\varphi .$$

Отсюда же пользуясь теоремой Фубины и принимая во внимание, что $r^{-\alpha}D^{-\alpha}P_\alpha(\varphi-\theta;r)=P_0(\varphi-\theta;r)$, получаем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi=-\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_0(\varphi-\theta)\,d\varphi\right\}d\omega_\alpha(\theta).$$

Из последнего равенства заметив, что

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P_\alpha(\varphi-\theta;r)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}\,d\varphi=1,$$

имеем

$$\lim_{r\to 1-0}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi=-\int_0^{2\pi}d\omega_\alpha(\theta).$$

Далее исследуется вопрос о принадлежности произведения Бляшке классу $A_\alpha(-1<\alpha<0)$. Произведение Бляшке хотя и является ограниченной аналитической функцией, однако не всегда принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha<0)$, так как для этого (см. [1], стр. 655) необходимо, чтобы нули этой функции удовлетворяли условию (1). Возникает вопрос: если $B_\alpha(z;\{z_n\})$ принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha<0)$, то соответствующее произведение $B(z;\{z_n\})$ принадлежит ли классу A_α. Ответ на этот вопрос положителен.

Теорема 3. Пусть $-1<\alpha\le 0$ и пусть $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ - последовательность комплексных чисел удовлетворяющая условию (1), тогда произведение $B(z;\{z_n\})$ принадлежит классу A_α.

Доказательство. Для $\alpha=0$ утверждение теоремы очевидно. Пусть $-1<\alpha<0$. Из результата (6) о взаимосвязи произведений $B_\alpha(z;\{z_n\})$ и $B(z;\{z_n\})$ имеем

$$B(z;\{z_n\})=B_\alpha(z;\{z_n\})\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)d\omega(\theta)\right\},$$

где $\omega(\theta)$ - невозрастающая функция ограниченной вариации на $[0,2\pi]$, имеющая вид (7). Вычислим

$$\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi\le\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|B_\alpha\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi-$$

$$-\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_\alpha\left(re^{i(\varphi-\theta)}\right)d\omega(\theta)\right]\right\}. \qquad (13)$$

Отметим, что из формулы (12) следует, что левая часть равенства (13) положительна. Первый интеграл правой части (13) ограничен, так как $B_\alpha(z;\{z_n\})\in A_\alpha$ (см. [1], стр. 637). Ограниченность второго интеграла правой части равенства (13) доказывается так же, как в теореме 2. Таким образом

$$\sup_{0<r<1}\int_0^{2\pi}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|B\left(re^{i\varphi};\{z_n\}\right)\right|\right\}d\varphi<+\infty.$$

Замечание. Последняя теорема доказывается сравнительно легко, однако, результат представляет определенный интерес.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказаны две теоремы о граничных значениях произведений Джрбашяна и Бляшке, а также доказана, что произведение Бляшке принадлежит классу $A_\alpha\left(-1<\alpha<0\right)$ Джрбашяна.

REFERENCES

[1] M. M. Jrbashyan. *Intergalnie preobrazovanija i predstavlenija funkcij v kompleksnoj oblasti.* Nauka. Moskva, (1986).

[2] I. I. Gavrilov. *Granichnie svojstva analiticheskix funkcij*. Gos. Izd. Texniko-teor. Mt., Moskva, Leningrad, (1950).

[3]V. S. Zakaryan. Ob odnoj ocenke dlja proizvedenij M. M. Jrbashyana. *Izvestija AN Arm. SSR, Matematika*, **XXIII**, **2**, 189-192, (1988).

[4] V. S. Zakaryan. O predelnix znachenijax funkcii B_α. *Izvestija AN Arm. SSR, Matematika*, **3**, **4-5**, 287-300, (1968).

[5] M. M. Jrbashyan, V. S. Zakaryan. *Klassi i granichnie svojstva funkcij meromorfnix v kruge*. Nauka, Moskva, (1993).

[6] M. M. Jrbashyan, V. S. Zakaryan . O faktorizacii funkcii B_α. *Mat. zametki*, **4**, **1**, 3-10, (1968)

[7] R. Nevanlinna. *Einduetige Analytische Funktionen*, Springer, Berlin, (1937).

[8] L. V. Ahlfors, *Complex Analisis*, McGraw-Hill, (1979).

Поступила в редакцию 10 февраля 2014 года.