MATHEMATICA MONTISNIGRI
VOL XXXII (2015) 31-37

Посвящаю 80-ю моего учителя, профессора В. И. Гаврилова

О ГРАНИЧНОМ ПОВЕДЕНИИ ПОДЧИНЕННЫХ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Л. БЕРБЕРЯН*

*Российско-Армянский (Славянский) университет,
Ереван, Армения
e-mail: samvel357@mail.ru

Ключевые слова: подчиненные субгармонические и нормальные функции, угловые и хордальные пределы.

Аннотация. В статье рассматриваются подчиненные и нормальные субгармонические функции, определенные в единичном круге. Получены достаточные условия для существования хордальных и угловых пределов. Ранее автором аналогичные результаты были получены для субгармонических и δ-субгармонических функций.

ON BOUNDARY BEHAVIOR OF SUBORDINATE SUBHARMONIC FUNCTIONS

S. L. BERBERYAN*

*Russian-Armenian (Slavonic) University,
Yerevan, Armenia
e-mail: samvel357@mail.ru

Summary. This paper considers subordinate and normal subharmonic functions, defined in the unit circle. New sufficient conditions for the existence of chordal and angular limits are obtained. Earlier, the author obtained similar results for subharmonic and δ-subharmonic functions.

2010 Mathematics Subject Classification: 31A05, 31A20
Key words and Phrases: subordinate and normal subharmonic functions, angular and chordal limits

1 ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена исследованию граничного поведения подчиненных субгармонических функций, определенных в единичном круге. Граничному поведению мероморфных и аналитических функций, определенных в единичном круге, посвящены многочисленные работы известных математиков. Вчастности, отметим важные работы Фату, Плеснера, И. И. Привалова, Н.Н.Лузина, Дж. Харди, Э. Коллингвуда, А. Ловатера, Л. Карлесона, Р. Неванлинны, В. И. Гаврилова, В. С. Захаряна. Кроме того, граничное поведение рассматривалось также для гармонических и субгармонических функций, определенных в единичном круге. В этом направлении важно отметить работы Дж. Литтлвуда, И. И. Привалова, М. Цудзи, Е. Д. Соломенцева, М.Арсова, П. Лаппана. В настоящее время исследования в области граничных свойств функций комплексной переменной, определенных в единичном круге, продолжаются. В дальнейшем будем придерживаться общепринятых обозначений и определений из работы В. И. Гаврилова[1]. Обозначим через D , Γ и $h(\xi,\varphi)$ соответственно единичный круг $|z|<1$, единичную окружность $|z|=1$ и хорду единичного круга D, оканчивающуюся в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и образующую с радиусом в этой точке угол φ, $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ обозначает подобласть круга D, ограниченную хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ и если нас не интересует размер угла Штольца, мы будем обозначать его кратко $\Delta(\xi)$. Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi \in \Gamma$ является предельной точкой, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т.е. $C(f,\xi,S) = \bigcap \overline{f(S \bigcap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R = (-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi \in \Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi \in \Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Скажем[2], что $u(z)$ подчинена в D субгармонической функции $v(z)$, если имеет место соотношение $u(z) = v[\omega(z)]$, где $\omega(z)$ есть аналитическая в D функция, причём $\omega(0)=0$, $|\omega(z)|<1$. Функция $v(z)$ называется подчиняющей функцией. И.И.Приваловым[2] показано, что функция $u(z)$ будет субгармонической в D. Аналогично определяют понятие подчиненности в случае, когда функция $v(z)$ аналитическая. Тогда подчиненная функция $u(z)$ также будет аналитической в единичном круге D. Обозначим через $u^{+}(z)=\max\{u(z),0\}$. Понятие нормальной функции, рассмотренное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $\mathrm{T}=\{S(z);S(z)=e^{i\alpha}(z+a)\cdot(1+\overline{a}z)^{-1}$, a-произвольная точка в D, α -произвольное действительное число$\}$. Придерживаясь обозначений из работы[1] применительно к действительнозначным функциям скажем, что действительнозначная функция $f(z)\in\Re$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi:\{f(S(z));\ S(z)\in\mathrm{T}\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$, семейства Φ, где $S_n(z)\in\mathrm{T}$ можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ (или к $+\infty$) на K. Рассмотрим функции $f(z)$, определённые в D и представимые в виде разности двух субгармонических функций $u(z)$ и $v(z)$, т. е. $f(z)=u(z)-v(z)$. Такие функции называют δ-субгармоническими функциями[-2]. При этом $f(z)\neq\infty$. Введём характеристическую функцию $T(\rho)=T(\rho,f)$, изученную в отмеченной работе[2] И. И. Привалова.

$$T(\rho)=T(\rho,f)=m^{+}(\rho,u)+N(\rho,v),\ 0<\rho<1,$$

$$m^{+}(\rho,u)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u^{+}(\rho e^{i\theta})d\theta \text{ и } N(\rho,v)=\int_0^{\rho}\frac{n(r)-n(0)}{r}dr+n(0)\cdot\ln\rho.$$

$N(\rho,v)$ выражает среднюю плотность масс внутри круга радиуса p, $n(r)$-масса распределения в круге $|z|<r$, $n(0)$-масса распределения в точке $z=0$ и точка $z=0$ имеет изолированную массу.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем основные теоремы.

Теорема 1. Пусть определенная в D функция $u(z)$ подчинена в D субгармонической функции $v(z)$, для которой

$$\int_0^{2\pi}v^{+}(re^{i\theta})d\theta=O(1) \text{ при } r\to 1 \qquad (1)$$

Тогда всюду на Γ, кроме, быть может, множества E, $mes\mathrm{E}=0$, функция $u(z)$ имеет равные конечные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z\in h(\xi,\varphi)\\ z\to\xi}} u(z)=u(\xi)$ для почти всех всех $\varphi\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi=0$.

Теорема 2. Пусть субгармоническая в D функция $u(z)$ из класса $\Re$ подчинена в D субгармонической функции $v(z)$, для которой справедливо соотношение (1) при $r\to 1$. Тогда почти всюду на Γ $u(z)$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Для доказательства полученных результатов рассмотрим следующую лемму.

Лемма. Если субгармоническая в D функция $u(z)$ подчинена в D субгармонической функции $v(z)$, то справедливо неравенство $\int\limits_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta \le \int\limits_0^{2\pi} v^+(re^{i\theta})d\theta$, каково бы ни было r, $0<r<1$.

Доказательство. Будем вести доказательство по схеме, рассмотренной в монографии[2]. Очевидно, что в силу субгармоничности функций $u(z)$ и $v(z)$, функции $u^+(z)$ и $v^+(z)$ будут субгармоническими. Обозначим через $g(z)$ и $G(z)$ наилучшие гармонические мажоранты для субгармонических функций $u^+(z)$ и $v^+(z)$ в круге $|z|\le r<1$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} g(re^{i\theta})d\theta=g(0),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} v^+(re^{i\theta})d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G(re^{i\theta})d\theta=G(0), \qquad (2)$$

то из неравенства $g(0)\le G(0)$ будет непосредственно следовать утверждение леммы. В силу неравенства Шварца[2] $\left|\omega(re^{i\theta})\right|\le r$ и, следовательно, имеем, что $u^+(re^{i\theta})=v^+[\omega(re^{i\theta})]\le G[\omega(re^{i\theta})]$.

Отсюда получим, что $g(0)=\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta\le\dfrac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} G[\omega(re^{i\theta})]d\theta=G[\omega(0)]=G(0)\cdot$

Из последнего неравенства, принимая во внимание соотношения (2) вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Действительно, из условий теоремы 1 следует, согласно утверждению леммы, что функция $u(z)$- субгармоническая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta = O(1) \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{3}$$

Отсюда, в силу известной теоремы Арсова и Хубера[3] о существовании равных конечных пределов по почти всем хордам почти всюду на Г, вытекает утверждение теоремы 1.

Для доказательства теоремы 2 рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, получим, что функция $u(z)$- субгармоническая функция, принадлежащая классу $\Re$, и она удовлетворяет соотношению (3). Отсюда, в силу известной теоремы[4] Мика о существовании конечных угловых пределов у функции $u(z)$ из класса $\Re$ получим утверждение теоремы 2.

Рассмотрим еще несколько применений леммы .

Следствие 1. Пусть определенная в D функция $u(z)$ подчинена в D гармонической функции $v(z)$, для которой $\int_0^{2\pi} v^+(re^{i\theta})d\theta = O(1)$ при $r \to 1$. Тогда всюду на Γ, кроме, быть может, множества E, $mes\mathrm{E} = 0$, функция $u(z)$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Доказательство. Действительно, так как $\omega(z)$ есть аналитическая в D функция, причём $\omega(0) = 0$, $|\omega(z)| < 1$, то эта функция, очевидно, отображает все точки единичного круга в D в точки единичного круга. Поэтому функция $u(z)$- гармоническая функция в D. Из утверждения леммы следует, что гармоническая функция $f(z)$, определённая в D, удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} u^+(re^{i\theta})d\theta = O(1)$ при $r \to 1$. Тогда согласно известной теореме о существовании угловых граничных значений у гармонических функций[5-8] получим утверждение следствия 1.

Легко видеть, что если функция $f(z)$ подчинена в D аналитической функции $v(z)$, то $\ln^+|f(z)|$ подчинена в D функции $\ln^+|v(z)|$. Известно, что если $v(z)$ аналитическая функция, то $\ln^+|v(z)|$ субгармоническая функция, а, значит, и подчиненная функция $\ln^+|f(z)|$ также будет субгармонической функцией.

Рассмотрим еще одно применение леммы.

Следствие 2. Пусть определенная в D функция $f(z)$ подчинена в D аналитической функции $v(z)$, для которой

$$\int_0^{2\pi} \ln^+ \left|v(z)\right| d\theta = o(1) \text{ при } r \to 1$$

Тогда всюду на Γ, кроме, быть может, множества E, mesE=0, функция $f(z)$ имеет конечные угловые граничные пределы.

Доказательство. Действительно, из определения подчиненности следует, что $f(z)$ будет аналитической в D функцией. В силу утверждения леммы функция $f(z)$ удовлетворяет условию $\int_0^{2\pi} \ln^+ \left| f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta = O(1)$ при $r \to 1$. Поэтому функция $f(z)$ принадлежит классу A и, значит, согласно одной теореме Р. Неванлинны[5-7] , всюду на Γ, кроме, быть может, множества E, mesE=0, функция f(z) имеет конечные угловые граничные пределы. Утверждение следствия 2 доказано.

Понятие подчиненности функции, рассмотренную для субгармонических функций, распространим на δ -субгармонические функции. Легко видеть, что если определенная в D функцияu(z)подчинена δ-субгармонической функции $v(z)$,то функцияu(z)также δ -субгармоническая функция. Действительно, так как $v(z) = v_1(z) - v_2(z)$, где $v_1(z)$ и $v_2(z)$ субгармонические функции, то $v_1'(z) = v_1(\omega(z)), v_2'(z) = v_2(\omega(z))$ будут субгармоническими функциями. Поэтому получим представление δ-субгармонической функции $u(z) = \gamma[\omega(z)] = v_1(\omega(z)) - v_2(\omega(z)) = v_1'(z) - v_2'(z)$ где $\omega(z)$ есть аналитическая в D функция, причём $\omega(0) = 0$ и $|\omega(z)| < 1$. А это значит , что функция u(z) также δ-субгармоническая функция. Изучим граничное поведение подчиненных б-субгармонических функций.

Теорема 3. Пусть определенная в D функция u(z) подчинена в D б-субгармонической функции f(z), для которой справедливо соотношение

$$T(\rho) = T(\rho, f) = O \text{ при } \rho \to 1 \qquad (4)$$

Тогда всюду на Г, кроме, быть может, множества E, mesE=0, субгармоническая в D функция $u(z)$ имеет равные конечные хордальные пределы $\lim\limits_{\substack{z \to \xi \in \Gamma \setminus E \\ z \in h(\xi, \varphi)}} u(z) = u(\xi)$ для почти всех $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, в том числе и для $\varphi = 0$.

Доказательство. Действительно, соотношение (4) является необходимым и достаточным условием[2] для представимости функции $f(z)$ в виде разности двух неположительных субгармонических функций $f_1(z), f_2(z)$.

Из определения подчиненности следует, что и функция $u(z)$ представима в виде разности двух неположительных субгармонических функций.

Отсюда придерживаясь тех же рассуждений, что и в теореме 1 из работы[9] получим утверждение теоремы 3.

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье изучены некоторые граничные свойства подчиненных субгармонических и б-субгармонических функций, определенных в единичном круге. Ранее аналогичные вопросы рассматривались для некоторых классов мероморфных, субгармонических и б-субгармонических функций.

REFERENCES

[1] V. I. Gavrilov ”Normalnie funktsii i pochti periodicheskie funcktsii”, *DAN SSSR*, **240**, **4**, p.768-770, (1978).

[2] I. I. Privalov. *Subgarmonicheskie funktsii.* M. L., NKTP SSSR, p.199, (1937).

[3] M. Arsove, A. Huber "On the existence of nontangential limits of subharmonic functions", *Journal London Math.Soc.,* **42**, **1**, p.125-132, (1967).

[4] J. Meek “Subharmonic versions of Fatous theorem”, *Proc.Amer.Math.Soc*., **30**, **2**, p.313-317, (1971).

[5] I.I. Privalov, *Granichniesvoistvaanaliticheskikhfuncktsii*, M.L., GITTL, p.336, (1950).

[6] K.Noshiro. *Predelnie mnojestva*, Inostrannaya literatura, p. 253, (1963).

[7] E. F. Collingwood, A. J. Lohwater. *Theoriya predelnikh mnojestv*, Mir, p.306, (1971).

[8] V.I.Gavrilov, V.S.Zakharyan, A.V.Subbotin ”Lineinotopologicheskie svoistva maximalnikh prostranstv Hardy garmonicheskikh funcktsii vkruge”, *DNAN Armenii*, **102**, **3**, p.203-209, (2002).

[9] S. L. Berberyan “O granichnom povedenii б-subgarmonicheskikh funcktsii”, *MATHEMATICA MONTISNIGRI*, **29**, p. 5–10, (2014).

Поступила в редакцию 10.12.2014.