MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXII (2015) 38-54

Посвящается 80-летию профессора В. И. Гаврилова

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЯДОВ ПО ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША

С.А. ЕПИСКОПОСЯН

Национальный политехнический университет Армении
Ереван, Армения
e-mail: sergoep@ysu.am

Ключевые слова: обобщенная система Уолша, нуль-ряд, весовое пространство.

Аннотация. Рассматриваются весовые пространства $L^1_\mu[0,1]$ и вопрос единственности представлений функций этих классов рядами по обобщенной системе Уолша.

ON UNIQNESS OF SERIES WITH GENERALIZED WALSH SYSTEM

S.A. EPISKOPOSIAN
National Engineering University of Armenia
Yerevan, Armenia
e-mail: sergoep@ysu.am

Summary. Issues concerning a weighted L^1_μ spaces and the question of the uniqueness of the representation of functions of these classes by series in the generalized Walsh system.

2010 Mathematics Subject Classification: 42C10, 42C25.
Key words and Phrases: generalized system of Walsh, null-series, weight space.

1 ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений теории ортогональных рядов является проблема единственности представления функции рядом по некоторой ортогональной системе функций. Изучение вопроса единственности представления функции в виде ряда по системе ортогональных функций впервые началось в теории тригонометрических рядов.

Вопросы единственности представления функции сходящимся к ней рядами тесно связаыа с так называемым U и M мнажествам, которые определяются следующим образом:

Определение 1. Множество $E \subset [0,2\pi]$ называется U- множеством или множеством единственности для тригонометрической системы, если тригонометрический ряд, сходящийся к нулю во всякой точке $(0,2\pi] \setminus E$, есть ряд нулей. Множество, не являющееся U-множеством, называется множеством неединственности, или M-множеством.

В 1870 году Г. Кантор показал, что конечное (а также пустое) множество является U-множеством, доказав первую теорему единственности (см. [1]) .

Теорема A (Кантора). Если тригонометрический ряд сходится к нулю всюду на $[0,2\pi]$, кроме конечного множества точек, то этот ряд является тождественно нулевым, то есть все его коэффициенты равны нулю.

Согласно теореме Кантора не существует двух различных тригонометрических рядов, сходящихся всюду на отрезке $[0,2\pi]$, кроме, быть может, конечного числа точек, к одной и той же конечной функции.

В 1909 году У. Юнг, в работе [2], улучшил этот результат, показав, что теорема Кантора остаётся в силе, если требовать сходимость ряда только вне счётного множества.

Полученные Г. Кантором и У. Юнгом множества единственности имеют меру нуль. До 1916 года существовала гипотеза, что любое множество меры нуль является U- множеством. Эта гипотеза в 1916г. была опровергнута Д. Е. Меньшовым [3] . Он для тригонометрической системы, построил первый пример совершенного M-множества меры нуль. Далее напомним определение так называемого нуль – ряда:

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ - некоторая система функций , определенных на $[0,1]$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \tag{1}$$

называется нуль – рядом в смысле сходимости почти всюду (по мере, по L_μ^1- метрике), если ряд (1) сходится к нулю почти всюду (соответственно по мере, по L_μ^1- метрике), хотя не все ее коэффициенты равны нулю.

Первый тригонометрический нуль – ряд, в смысле сходимости почти всюду, был построен Д.Е.Меньшовым. Далее А.А. Талалян [4] доказал существование нуль – рядов, по произвольной ортонормированной полной в L^2 системе , в смысле сходимости по мере.

Как показал Б.С.Кашин [5] , здесь нельзя заменить сходимость по мере сходимостью почти всюду.

А.А.Шнейдер [6] доказал, что аналогичные результаты справедливы и для рядов по системе Уолша в нумерации Пэли.

Очевидно, что нельзя построить нуль – ряд в смысле сходимости по метрике L^1. Но тем не менее, в некоторых весовых пространствах L^1_μ возможно построить нуль – ряды по некоторым системам. В работах [7] и [8] доказаны существование таких рядов по тригонометрической системе и по классической системе Уолша. В настоящей работе рассматривается аналогичные вопросы для обобщенной системы Уолша.

Теперь напомним определение обобщенной системе Уолша [9]. Пусть $a \ge 2$ фиксированное целое число и $\omega_a = e^{\frac{2\pi}{a} i}$.

Как и в классическом случае сперво определим обобщенную систему Радемахера:

Определение 3. Возьмем

$$\varphi_0(x) = \omega_a^k, \quad x \in \left[\frac{k}{a}, \frac{k+1}{a}\right), \quad k = 0,1,\ldots,a-1$$

и для $n \ge 0$ положим

$$\varphi_n(x+1) = \varphi_n(x) = \varphi_0(a^n x).$$

Тогда обобщенная система Уолша или система Кристенсона-Леви порядка a определяется следующим образом:

Определение 4. Положим $\psi_0(x) = 1$. Если

$$n = \alpha_1 a^{n_1} + \ldots + \alpha_s a^{n_s}, \; n_1 > n_2 > \ldots > n_s, \; s = 1,2,\ldots,$$

где $0 \le \alpha_j < a$, $j = 1,2,\ldots,s$, то

$$\psi_n(x) = \varphi_{n_1}^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot \varphi_{n_s}^{\alpha_s}(x).$$

Система Ψ_a - есть обобщенная система Уолша поряка a . Отметим, что Ψ_2 является классической системой Уолша, а система Ψ_a является частным случаем системы Виленкина.

Замечание. Обобщенная система Уолша Ψ_a, $a \ge 2$ является полной ортонормированной системой в $L^2[0,1)$ (см. [9]) .

Основные свойства системы Ψ_a получены Г.Кристенсоном, Р. Пели, Ж. Файном, К. Ватари, Н. Виленкиным и другими математиками (см. [10]- [15]).

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$$\mu(x),\ 0 < \mu(x) \le 1,\ \left|\{x \in [0,1) : \mu(x) \ne 1\}\right| < \varepsilon,$$

такая, что в весовом пространстве $L^1_\mu[0,1)$ можно построить нуль - ряд по обобщенной системе Уолша, а именно существует ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x) \text{ с } \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 > 0,$$

который сходится к нулью по метрике $L^1_\mu[0,1)$ т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m} C_k \psi_k(x) \right| \mu(x)dx = 0.$$

Теорема 1 следуют из более сильной теоремы, формулировка которой такова:

Теорема 2. Пусть $\omega(t)$ некоторая непрерывная функция, неубывающая на $[0,\infty)$ и $\omega(+0) = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримая функция

$$\mu(x),\ 0 < \mu(x) \le 1,\ \left|\{x \in [0,1) : \mu(x) \ne 1\}\right| < \varepsilon,$$

такая, что для любой функции $f(x) \in L^1_\mu[0,1)$ можно найти ряд по обобщенной системе Уолша, вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_k \psi_k(x) \text{ с } 0 < \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \omega(|C_k|) < \infty,$$

который сходится к $f(x)$ по метрике $L^1_\mu[0,1)$ т.е.

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{m} C_k \psi_k(x) - f(x) \right| \mu(x)dx = 0.$$

2 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ ЛЕММ

Ниже приведем некоторые свойства систем Φ_a и Ψ_a:

Обозначим интервал ранга n относительно a следующим образом:

$$\Delta_k^{(n)} = \Delta_k^{(n)}(a) = \left[\frac{k}{a^n}, \frac{k+1}{a^n}\right),\ k = 0,1,\dots,a^n - 1,\ n = 1,2,\dots.$$

A). Если $\varphi_n(x)$, n-ая функция Радемахера порядка a, то из Определения 3 следует

$$\varphi_n(x)=\omega_a^k=e^{\frac{2\pi ik}{a}}, \quad x\in\Delta_k^{(n+1)}=\left[\frac{k}{a^{n+1}},\frac{k+1}{a^{n+1}}\right). \tag{2}$$

B). Каждая n-ая функция Радемахера имеет период $\frac{1}{a^n}$ и

$$\varphi_n(x)=const\in\Omega_a=\{1,\omega_a,\omega_a^2,....,\omega_a^{a-1}\},$$

при $x\in\Delta_{n+1}^{(k)}$, $k=0,...,a^{n+1}-1$, $n=1,2,....$.

Нетрудно видеть, что

$$(\varphi_n(x))^k=(\varphi_n(x))^m, \forall n,k\in\mathbb{N}, \textit{где}\ \ m=k\ (mod\ a)$$

C). Из Определения 4 имеем

$$\psi_i(x)\cdot\psi_j(a^s x)=\psi_{j\cdot a^s+i}(x), \text{ где } \ 0\le i,\ j<a^s \tag{3}$$

и в частности

$$\psi_{a^k+j}(x)=\varphi_k(x)\cdot\psi_j(x), \text{ где } \ 0\le j\le a^k-1\ .$$

A). Для любого натурального n, функция Уолша $\psi_n(x)$ состоит из конечного произведения функций Радемахера и принимает значения из Ω_a.

B). Пусть $\omega_a=e^{2\pi ia}$. Тогда для любого натурального числа m имеем

$$\sum_{k=0}^{a-1}\omega_a^{k\cdot m}=\begin{cases} a\ , \textit{если}\ m\equiv 0(mod\ a), \\ 0, \ \textit{если}\ m\ne 0(mod\ \ a)\,. \end{cases} \tag{4}$$

F). Далее, для любых $m=1,2,...$ и $1\le k\le a^m$ рассмотрим функцию

$$I_m^{(k)}(x)=\begin{cases} 1, \text{при} \ \ x\in[0,1]\setminus\Delta_m^{(k)}, \\ 1-a^m, \text{ при } \ x\in\Delta_m^{(k)}, \end{cases} \tag{5}$$

и продолжим функцию периодический на R^1 с периодом 1. Через $\chi_E(x)$ обозначим характеристическую функцию множества E, т.е.

$$\chi_E(x)=\begin{cases} 1, \text{при} \ \ x\in E, \\ 0, \text{ при } \ x\notin E. \end{cases} \tag{6}$$

Лемма 1. Для функций $I_m^{(k)}(x)$ *и* $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$ имеет место следующее:

1) $\quad \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)=\sum_{i=0}^{a^m-1}a_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right)\psi_i(x)$,

2) $$I_m^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{a^m-1} b_i\left(I_m^{(k)}\right)\psi_i(x) ,$$

где коэффициенты Фурье вычисляются следующим образом

$$a_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\cdot\overline{\psi_i}(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ при } & i \ge a^m, \\ \dfrac{\Im}{a^m}, \text{ при } & 0 \le i < a^m. \end{cases}$$

3) $$b_i\left(I_m^{(k)}\right) = \int_0^1 I_m^{(k)}(t)\cdot\overline{\psi_i}(t)dt = \begin{cases} 0, \text{ при } & \mathrm{i} = 0 \text{ и } i \ge a^m, \\ -\Im, \text{ при } & 0 \le i < a^m. \end{cases}$$

где $\Im = const \in \Omega_a = \left\{1, \omega_a, \omega_a^2, ..., \omega_a^{a-1}\right\}$ и $|\Im| = 1$.

Доказательство . Очевидно, что

$$I_m^{(k)}(x) = \psi_0(x) - a^m \cdot \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \ . \tag{7}$$

Вычислим коэффициент Фурье функции $\chi_{\Delta_m^{(k)}}(x)$:

$$a_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t)\cdot\overline{\psi_i}(t)dt = \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\psi_i}(t)dt. \tag{8}$$

1) Если $i \ge a^m$, то $i = a^m + j$, $0 < j < a^m$, следовательно из (3.5) имеем

$$\overline{\psi_i}(t) = \overline{\varphi_m}(t)\cdot\overline{\psi_j}(t). \tag{9}$$

Учитывая, что каждом интервале $\Delta_m^{(k)}, \ 0 \le k < a^m$

$$\overline{\psi_j}(t) = \Im = const \in \Omega_a \text{ и } |\Im| = 1 ,$$

то из (4) и (6) получим

$$a_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \Im \cdot \int_{\Delta_m^{(k)}} \overline{\varphi_m}(t)dt. = \Im \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \int_{\Delta_{m+1}^{(s)}} \omega_a^s dt = \Im \cdot \frac{1}{a^{m+1}} \cdot \sum_{s=0}^{a-1} \omega_a^s = 0 . \tag{10}$$

Если $0 \le i < a^m$, то $\overline{\psi_j}(t) = \Im = const \in \Omega_a$, следовательно,

$$a_i\left(\chi_{\Delta_m^{(k)}}\right) = \Im \cdot \left|\Delta_m^{(k)}\right| = \frac{\Im}{a^m}. \tag{11}$$

Таким образом условия 1) и 3) Леммы 1 выполнены. Докажем условия 2) и 4) .
Из Определения 2.1.2 и (2.54) имеем

$$b_i\left(I_m^{(k)}\right) = \int_0^1 I_m^{(k)}(t)\cdot\overline{\psi_i}(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \psi_0(t) \cdot \overline{\psi_i}(t)dt - a^m \cdot \int_0^1 \chi_{\Delta_m^{(k)}}(t) \cdot \overline{\psi_i}(t)dt = I_1 - a^m \cdot I_2 . \tag{12}$$

Так как система Ψ_a является ортонормированной системой на $[0,1)$, то имеем

$$I_1 = \begin{cases} 0, \text{при}\, i > a^m, \\ 0, \text{при}\;\; i = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Из условий (10), (11) получим

$$I_2 = \begin{cases} 0, \;\text{при}\;\; i > a^m, \\ \dfrac{1}{a^m}, \;\text{при}\;\, i = 0, \\ \dfrac{\Im}{a^m}, \text{при}\, 1 \le i < a^m . \end{cases} \tag{14}$$

Из условий (13), (14) получим условие 4) Леммы .
Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Для любых данных чисел $\gamma \neq 0$, $N_0 \in \mathrm{N}$, $\varepsilon \in (0,1)$ и интервала ранга a вида $\Delta_m^{(i)} = \left[\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right], 1 \le i \le 2^m$, существуют измеримое множество $E \subset \Delta$ и полином $P(x)$ по системе Ψ_a вида

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k \psi_k(x)$$

удовлетворяющие условиям:

$$|E| > |\Delta| \cdot (1 - \varepsilon)$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma, \text{при} \quad x \in E, \\ 0, \; вне \;\, \Delta . \end{cases}$$

$$\left[\sum_{k=N_0}^{N} c_k^2\right]^{\frac{1}{2}} \le a \cdot |\gamma| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta|}{\varepsilon}}$$

Доказательство. Положим

$$\nu_0 = \left[\log_a \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \quad , \; s = [\log_a N_0] + m \tag{15}$$

Определим коэффициенты c_n, a_i, b_j и полином $P(x)$ следующим образом:

$$P(x) = \gamma \cdot \chi_{\Delta_m^{(k)}}(x) \cdot I_{\nu_0}^{(1)}(a^s x), \;\; x \in [0,1)\,, \tag{16}$$

$$c_n = c_n(P) = \int_0^1 P(x)\overline{\psi_n}(x)dx\,, \forall n \geq 0,$$

$$a_i = a_i(\chi_{\Delta_m^{(k)}})\,, 0 \leq i < a^m\,, b_j = b_j(I_{\nu_0}^{(1)})\,, 1 \leq j < a^{\nu_0}\,.$$

Применяя Лемму 1 и учитывая (3) для $P(x)$ получим

$$P(x) = \gamma \cdot \sum_{i=0}^{a^m - 1} a_i \psi_i(x) \cdot \sum_{j=1}^{a^{\nu_0} - 1} b_j \psi_j(a^s x) =$$

$$= \gamma \cdot \sum_{j=1}^{a^{\nu_0} - 1} b_j \cdot \sum_{i=0}^{a^m - 1} a_i \psi_{j \cdot a^s + i}(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k \psi_k(x)\,,$$

где

$$c_k = c_k(P) = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{K} \cdot \gamma}{a^m} \;\; \textit{или} \;\; 0\,, \textit{при} \;\; k \in [N_0, N], \\ \quad 0\,, \quad \textit{при} \quad k \notin [N_0, N], \end{cases} \tag{17}$$

$$\mathrm{K} \in \Omega_a\,, \; |\mathrm{K}| = 1,\, N = a^{s+\nu_0} + a^m - a^s - 1. \tag{18}$$

Положим

$$E = \{x \in \Delta : P(x) = \gamma\}\,.$$

Из (6), (7) и (16) имеем

$$|E| = a^{-m}(1 - a^{-\nu_0}) > (1 - \varepsilon)|\Delta|,$$

$$P(x) = \begin{cases} \gamma\,, \quad \textit{при} \quad x \in E\,, \\ \gamma(1 - a^{\nu_0})\,, \textit{при}\; x \in \Delta \setminus E\,, \\ 0\,, \quad \textit{при} \quad x \notin \Delta\,. \end{cases}$$

Отсюда, и из (15) имеем

$$\int_0^1 |P(x)|\,dx = 2 \cdot |\gamma||\Delta| \cdot (1 - a^{-\nu_0})$$

Учитывая соотношения (15), (17) и (18) получим

$$\max_{N_0\le m\le N}\int_0^1\left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\psi_k(x)\right|dx<\left[\int_0^1|P(x)|^2\,dx\right]^{\frac{1}{2}}\le\left[\sum_{k=N_0}^{N}c_k^2\right]^{\frac{1}{2}}=$$

$$=|\gamma|\cdot|\Delta|\cdot\sqrt{a^{\nu_0+s}+a^m}=|\gamma|\cdot\sqrt{|\Delta|}\cdot\sqrt{a^{\nu_0}+1}<$$

$$<|\gamma|\cdot\sqrt{|\Delta|}\cdot\sqrt{\frac{a}{\varepsilon}}<a\cdot|\gamma|\cdot\sqrt{\frac{|\Delta|}{\varepsilon}}.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $\omega(t)$ некоторая непрерывная функция, неубывающая на $[0,\infty)$ и $\omega(+0)=0$. Тогда для любых чисел $0<\varepsilon<1$, $N_0>2$ и ступенчатой функции

$$f(x)=\sum_{s=1}^{q}\gamma_s\cdot\chi_{\Delta_s}(x), \tag{19}$$

где Δ_s интервалы вида $\Delta_m^{(i)}=\left[\frac{i-1}{2^m},\frac{i}{2^m}\right],1\le i\le 2^m$, существуют измеримое множество $E\subset[0,1]$ и полином $P(x)$ вида

$$P(x)=\sum_{k=N_0}^{N}c_kW_k(x)$$

которые удовлетворяют следующим условиям:

1. $P(x)=f(x)$ на E,
2. $|E|>1-\varepsilon$
3. $0<\sum_{k=N_0}^{N}|c_k|^2\cdot\omega(|c_k|)<\varepsilon$
4. $\max_{N_0\le m<N}\left[\int_e\left|\sum_{k=N_0}^{m}c_k\psi_k(x)\right|dx\right]<\varepsilon+\int_e|f(x)|\,dx.$

для любого измеримого подмножеств e из E.

Доказательство. Пусть $0<\varepsilon<1$ любое число. Тогда для любого положительного η, удовлетворяющая условию,

$$\eta<\frac{\varepsilon^2}{a^2}\cdot\left(\int_0^1 f^2(x)dx\right)^{-1},$$

по определению функции $\omega(t)$, существует положительное число $\delta < \varepsilon$ такого, что для любого t, $0 < t < \delta$ имеем

$$\omega(t) < \omega(\delta) < \eta. \tag{20}$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$a \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}} < \delta, \; s = 1,2,...,q. \tag{21}$$

Последовательно применяя Лемму 2, можно определить множества $E_s \in \Delta_s$ и полиномы $P_s(x)$ вида

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} \psi_k(x), \; s = 1,2,...,q \tag{22}$$

которые удовлетворяют условиям:

$$|E_s| > |\Delta_s| \cdot (1 - \varepsilon), \tag{23}$$

$$P_s(x) = \begin{cases} \gamma_s, & x \in E_s \subset \Delta_s, \\ 0, & x \notin \Delta_s, \end{cases} \quad s = 1,2,...,q. \tag{24}$$

$$\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} |c_k^{(s)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le a \cdot |\gamma_s| \cdot \sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}}, \quad s = 1,2,...,q. \tag{25}$$

Определим множество E и полином $P(x)$ следующим обрезом:

$$E = \bigcup_{s=1}^{q} E_s, \tag{26}$$

$$P(x) = \sum_{k=N_0}^{N} c_k \psi_k(x) = \sum_{s=1}^{q} \left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right], \tag{27}$$

где

$$c_k = c_k^{(s)} \text{ при } N_{s-1} \le k < N_s, \quad s = 1,2,...,q, \; N = N_q - 1. \tag{28}$$

Из (19), (23), (24), (26) и (27) получаем

$$P(x) = f(x) \quad \text{на } E.$$

$$|E| > 1 - \varepsilon.$$

Учитывая соотношения (21), (25), (28) для любого $k \in [N_0, N]$ имеем

$$|c_k| \le \max_{1\le s\le q}\left[a\cdot|\gamma_s|\cdot\sqrt{\frac{|\Delta_s|}{\varepsilon}}\right] < \delta\,. \tag{29}$$

Отсюда и из (20) следует

$$\omega(|c_k|) < \omega(\delta) < \eta\,, \quad \forall\ k \in [N_0, N]\,.$$

И учитывая (21) и (25) получаем

$$\sum_{k=N_0}^{N} |c_k|^2 \cdot \omega(|c_k|) < \eta \cdot \sum_{s=1}^{q}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} |c_k^{(s)}|^2\right] <$$

$$< \eta \cdot \frac{a}{\varepsilon} \cdot \left[\int_0^1 f^2(x)dx\right] < \varepsilon\,.$$

Таким образом условия 1) - 3) Леммы 3 выполнены. Проверим, теперь выполнение условие 4).

Пусть $N_0 \le m < N$, тогда для некоторого s_0, $1 \le s_0 \le q$, $\left(N_{s_0} \le m < N_{s_0+1}\right)$ следует (см. (27) и (28))

$$\sum_{k=N_0}^{m} c_k \psi_k(x) = \sum_{s=1}^{s_0}\left[\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)}\psi_k(x)\right] + \sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0)}\psi_k(x) \tag{30}$$

Учитывая выбор δ и то, что $P(x) = f(x)$ на E, то из соотношений (21), (25), (27) и (30), для любого измеримого множества $e \subset E$ имеем

$$\int_e \left|\sum_{k=N_0}^{m} c_k\psi_k(x)\right| dx = \int_e \left|\sum_{s=1}^{s_0}\left(\sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)}\psi_k(x)\right)\right| dx +$$

$$+\int_0^1 \left|\sum_{k=N_{s_0}}^{m} c_k^{(s_0)}\psi_k(x)\right| dx \le \int_e |f(x)|\,dx$$

$$+ a\cdot|\gamma_{s_0+1}|\cdot\sqrt{\frac{|\Delta_{s_0+1}|}{\varepsilon}} < \int_e |f(x)|\,dx + \varepsilon\,.$$

3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Доказательство Теоремы 2. Пусть $\omega(t)$ некоторая непрерывная функция, неубывающая на $[0,\infty)$ и $\omega(+0) = 0$. Если обозначим через

$$\{f_s(x)\}_{s=1}^{\infty}, \ x \in [0,1) \tag{31}$$

последовательность всех ступенчатых функций с рациональными значениями и конечными точками интервалов постоянства. Последовательно применяя Лемму 3, можем определить последовательности множеств $\{E_s\}_{s=1}^{\infty}$ и полиномов

$$P_s(x) = \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} c_k^{(s)} \psi_k(x), \quad 1 = N_0 < N_1 < .... < N_s < ... \ , \tag{32}$$

удовлетворяющие условиям:

$$|E_s| > 1 - 2^{-2(s+1)}, \quad E_s \subset [0,1), \tag{33}$$

$$P_s(x) = f_s(x), \quad x \in E_s, \tag{34}$$

$$0 < \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s-1} \left| c_k^{(s)} \right| \cdot \omega(| c_k^{(s)} |) < 2^{-2s}, \tag{35}$$

$$\max_{N_{s-1} \le p < N_s} \left[\int_e \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] \le 2^{-2(s+1)} + \int_e |f_s(x)| dx, \tag{36}$$

для любого измеримого подмножества e из E_s.

Пусть ε любое положительное число.
Положим

$$\begin{cases} \Omega_n = \bigcap_{s=n}^{\infty} E_s, \quad n = 1,2,...., \\ E = \Omega_{n_0} = \bigcap_{s=n_0}^{\infty} E_s, \quad n_0 = [\log_{1/2} \varepsilon] + 1, \\ B = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \Omega_n = \Omega_{n_0} \bigcup \left[\bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \Omega_n \setminus \Omega_{n-1} \right]. \end{cases} \tag{37}$$

Очевидно, что (см. (33) $|B| = 1$ и $|E| > 1 - \varepsilon$.

Определим функцию $\mu(x)$ следующим образом:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, \text{ при } \ x \in E \cup ([0,1) \setminus B), \\ \mu_n, \text{при } \ x \in \Omega_n \setminus \Omega_{n-1}, \ \mathrm{n} \ge n_0 + 1, \end{cases} \tag{38}$$

где

$$\begin{cases} \mu_n = \left[2^{2n} \prod_{s=1}^{n} h_s \right]^{-1}, \\ h_s = \left\| f_s(x) \right\|_C + \max_{N_{s-1} \le m < N_s} \left\| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right\|_C + 1. \end{cases} \tag{39}$$

где $\left\| g(x) \right\|_C = \max_{x \in [0,1)} \left| g(x) \right|$.

Из (35), (37) - (39) получим что

(a) $0 < \mu(x) \le 1$, $\mu(x)$ - измеримая функция со свойством и $\left| x \in [0,1) : \mu(x) \ne 1 \right| < \varepsilon$.

Учитывая соотношения (37)- (39) для всех $s \ge n_0$ и $p \in [N_{s-1}, N_s)$ получим

$$\int_{[0,1)\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x) dx =$$

$$= \sum_{n=s+1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu_n dx \right] \le$$

$$\le \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-2n} \left[\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \cdot h_s^{-1} dx \right] < \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s}. \tag{40}$$

В силу условий (34), (37)- (39) для всех $s \ge n_0$ имеем

$$\int_0^1 \left| P_s(x) - f_s(x) \right| \mu(x) dx = \int_{\Omega_s} \left| P_s(x) - f_s(x) \right| \mu(x) dx +$$

$$+ \int_{[0,1)\setminus\Omega_s} \left| P_s(x) - f_s(x) \right| \mu(x) dx \le 2^{-2(s+1)} +$$

$$+ \sum_{n=s+1}^{\infty} \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| P_s(x) - f_s(x) \right| \mu_n dx < 2^{-2(s+1)} +$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{n=s+1}^{\infty} 2^{-4s} \int_0^1 \left(\left| \sum_{k=N_{s-1}}^{N_s - 1} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| + \left| f_s(x) \right| \right) \cdot h_s^{-1} dx < \\ &< 2^{-2(s+1)} + 2^{-4s} < 2^{-2s}. \end{aligned} \tag{41}$$

Учитывая (a), (36) - (40) для всех $p \in [N_{s-1}, N_s)$ и $s \ge n_0 + 1$ получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x)dx = \int_{\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x)dx +$$

$$+ \int_{[0,1)\setminus\Omega_s} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| \mu(x)dx \le$$

$$\le \sum_{n=n_0+1}^{s} \left[\int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} \left| \sum_{k=N_{s-1}}^{p} c_k^{(s)} \psi_k(x) \right| dx \right] \mu_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} <$$

$$< \sum_{n=n_0+1}^{s} \left(2^{-2(s+1)} + \int_{\Omega_n \setminus \Omega_{n-1}} |f_s(x)| dx \right) \mu_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} =$$

$$= 2^{-2(s+1)} \cdot \sum_{n=n_0+1}^{s} \mu_n + \int_{\Omega_s} |f_s(x)| \mu(x)dx + \frac{1}{3} \cdot 2^{-2s} \le$$

$$\le \int_0^1 |f_s(x)| \mu(x)dx + 2^{-2s}. \tag{42}$$

Пусть $f(x) \in L^1_\mu[0,1)$, т.е. $\int_0^1 |f(x)| \mu(x)dx < \infty$.

Нетрудно видеть, что можно выбрать функцию $f_{\nu_1}(x)$ из последовательности (31) такую, что

$$\int_0^1 \left| f(x) - f_{\nu_1}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-2}, \ \nu_1 \ge n_0 + 1. \tag{43}$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_1}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-2} + \int_0^{2\pi} |f(x)| \mu(x)dx. \tag{44}$$

Из (41) и (439) следует

$$\int_0^1 \left| f(x) - P_{\nu_1}(x) \right| \mu(x)dx \le 2 \cdot 2^{-2}, \tag{45}$$

Предположим, что уже определены числа $\nu_1 < \nu_2 < ... < \nu_{q-1}$ таким образом, что удовлетворяются следующие условия:

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{j} P_{\nu_s}(x) \right| \mu(x)dx < 2 \cdot 2^{-2j} \;,\; 1 \le j \le q-1 , \tag{46}$$

Теперь выберем функцию $f_{\nu_q}(x)$ из последовательности (17) так, что

$$\int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} P_{n_s}(x) \right) - f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-2q} ,\;\; \nu_q > \nu_{q-1} . \tag{47}$$

Отсюда и из (46) получим

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx < 9 \cdot 2^{-2q} . \tag{48}$$

Из условий (41), (42) и (48) имеем

$$\int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx < 2^{-2\nu_q} , \tag{49}$$

где

$$P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} \psi_k(x) .$$

$$\max_{N_{\nu_{q-1}} \le p < N_{\nu_q}} \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu_{q-1}}}^{p} c_k^{(\nu_q)} \psi_k(x) \right| \mu(x)dx < 10 \cdot 2^{-2q} . \tag{50}$$

Учитывая соотношения (47) и (49) получим

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{s=1}^{q} P_{\nu_s}(x) \right| \mu(x)dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left| \left(f(x) - \sum_{s=1}^{q-1} P_{\nu_s}(x) \right) - f_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx +$$

$$+ \int_0^1 \left| f_{\nu_q}(x) - P_{\nu_q}(x) \right| \mu(x)dx < 2 \cdot 2^{-2q} . \tag{51}$$

Таким образом мы можем, по индукции определить последовательность полиномов

$$P_{\nu_q}(x) = \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} \psi_k(x), \; N_{\nu_q-1} > N_{\nu_{q-1}} \quad q = 1,2,...., \tag{52}$$

удовлетворяющие условиям (50) и (51) для всех $q \ge 1$.

Положим

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \psi_k(x) = \sum_{q=1}^{\infty} \left[\sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{N_{\nu_q}-1} c_k^{(\nu_q)} \psi_k(x) \right], \tag{53}$$

$$c_k = \begin{cases} c_k^{(\nu_s)}, \text{ при } N_{\nu_s-1} \le k < N_{\nu_s}, \; s = 1,2,.... \\ 0, \text{ в остальных случаях}. \end{cases} \tag{54}$$

Из условий (35), (53) и (54) следует, что

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} | c_k |^2 \cdot \omega(| c_k |) < \infty .$$

Теперь покажем, что ряд (39) сходится к $f(x)$ в метрике $L^1_\mu[0,1)$. Для любого натурального p, существует q такая, что $p \in [N_{\nu_q-1}, N_{\nu_q})$. Тогда из соотношений (51) - (54) получим

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{M_\nu} c_k \psi_k(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x) dx \le$$

$$\le \int_0^1 \left| \sum_{s=1}^{q-1} P_{\nu_s}(x) - f(x) \right| \cdot \mu(x) dx + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_{\nu_q-1}}^{p} c_k^{(\nu_q)} \psi_k(x) \right| \cdot \mu(x) dx <$$

$$< 2^{-2(q-1)} + 10 \cdot 2^{-2q} = 18 \cdot 2^{-2q},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2 доказана.

4 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказан, что для любого $\varepsilon > 0$ можно построить весовое пространство $L^1_\mu[0,1)$, любая функция которой можно представить рядом, с «хорошимы» коэффициентами, по обобщенной системе Уолша, в смысле сходимости по метрике $L^1_\mu[0,1)$. Отсюда, в частности, следует существование нуль-рядов в $L^1_\mu[0,1)$, по обобщенной системе Уолша .

REFERENCES

[1] G. Cantor, “Uber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz”, *Crelles fiir Math.*, **72**, 130 – 138, (1870).

[2] W. H. Young, “A note on trigonometric series”, *Mess of Math.*, **38**, 44-48, (1909).

[3] Menshov D.E., “Sur l’unicieté du développment trigonometrique”, C.*R. de I’Acqad. des Sci. a Paris*, **163**, 433- 436, (1916).

[4] Talalyan A.A., “O sxodimosti ortogonalnix ryadov”, Dokladi Akad. Nauk Arm. SSR, 110, 510-516, (1956).

[5] Kashin B.S., “Ob odnoy polnoy ortonormirowannoj sisteme”*, Mat. Sbornik,* **99***,* 356-365, (1976)

[6] Shneyder A.A., “O edinstvennosti razlogenii po sisteme Uolsha”*, Mat. Sbornik,* **24**, 279-300, (1949).

[7] Episkoposian S.A., “On the existence of universal series by trigonometric system”, *Journal of Functional Analysis*, **230**, 169 – 189, (2006).

[8] Episkoposian S.A., “On the existence of universal series by Walsh system”, *Izvestiya Natsionalnoi Akademii Nauk Armenii, English trans. in: Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, **38**, **4**, 25 – 40, (2003).

[9] Chrestenson H.E., “A class of generalized Walsh functions”, *Pacific Journal Mathematics*, **45**, 17 – 31, (1955).

[10] Paley R**.**, “A remarkable system of orthogonal functions”, *Proc. London Math. Soc.*, **34**, 241-279, (1932).

[11] Fine J., “The generalized Walsh-functions”, *Trans. AMS*, **69**, 66 – 67, (1950).

[12] Watari C., “On generalized Walsh-Fourier series”, *Toh. Math. J.*, **10**, 211–241, (1958).

[13] Vilenkin N.Ya., “Ob odnom klasse polnix ortogonalnix sistem”*, Izvestiya Akad. Nauk SSSR, ser. mat.*, **11**, 363 – 400, (1947).

[14] Episkoposian S. A., Grigorian M.G., “ L^p - convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* **389**, 1374-1379, (2012).

[15] Episkoposian S.A., “Uniformly convergence of greedy algorithm by generalized Walsh system”, *Siberian Mathematical Journal*, **54**, **5** , 810-816, (2013).

Поступила в редакцию 2.02.2015