MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXII (2015) 55-60

Посвящаем 80-летию нашего учителя профессора В. И. Гаврилова

ХАРАКТЕРИСТИКА МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ПЛЕСНЕРА ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ПО КАСАТЕЛЬНЫМ НАПРАВЛЕНИЯМ

М. М. МИРЗОЯН*, А. Н. АЙРАПЕТЯН†

*Армянский государственный экономический университет
Ереван, Армения
e-mail: an_mirzoyan@mail.ru

†Армянский государственный экономический университет
Ереван, Армения
e-mail: arkady.hayrapetyan@mail.ru

Ключевые слова: Предельные множества, множества точек Плеснера, эквиморфные функции.

Анотация. В статье даются характеристики множества точек Плеснера $I_A(f)$ [1], и множества $I^*_A(f)$ [2], порожденных предельными множествами произвольных и эквиморфных [3] в единичном круге функций по путям, имеющим произвольный порядок касания с единичной окружностью.

CHARACTERISTICS OF THE SET OF PLESNER'S POINTS OF ARBITRARY FUNCTIONS DEFINED IN THE UNIT CIRCLE ALONG TANGENTIAL DIRECTIONS

M. M. MIRZOYAN*, A. N. HAYRAPETYAN†

*Armenian State University of Economics, Yerevan, Armenia
e-mail: an_mirzoyan@mail.ru

†Armenian State University of Economics, Yerevan, Armenia
e-mail: arkady.hayrapetyan@mail.ru

Summary. The characteristics of the set of Plessner's points $I_A(f)$[1] and $I^*_A(f)$ [2] derived from cluster sets arbitrary equimorphic functions [3] in the unit disc along directions with arbitrary tangential order with the unit circumference are given.

2010 Mathematics Subject Classification: 30D35, 31A05.
Key words and Phrases: cluster sets, set of Plesner's points, equimorphic functions.

1 ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D:|z|<1$ единичниый круг, $\Gamma:|z|=1$ - единичная окружность, Ω-сфера Римана (на протяжений всей работы D, Γ и Ω остаются те же). В работе Мехия Х. Э. [3] функция $f:D\to\Omega$ названа эквиморфной функцией, если f есть композиция $f(z)=g(h(z))$ некоторой мероморфной функции $g(z)$ в круге D и эквиморфизма h: $D\to D$, т.е. такого гомеоморфизма круга D на себя, что h, h^{-1} равномерно непрерывны относительно гиперболической метрики единичного круга [4].

Пусть $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Для произвольных действительных чисел α и q, $0<\alpha<\infty$, $q\geq 0$ назовем правым q-путем $L^+(\xi,q,\alpha)$ всякую кривую, которая задается непрерывной на $[0;1)$ функцией $z=z(t)$ со свойствами:

$$\lim_{t\to 1} z(t)=\xi\,;\ \ |z(t)-\xi|<\frac{1}{2};\ \theta<\arg z(t)<\theta+\frac{\pi}{6}\ ,\ \arg z(t)\to 0\ \text{(монотонно), при } t\to 1 \text{ и}$$

$$\lim_{t\to 1}\left(1-|z(t)|\right)\left|\arg z(t)-\theta\right|^{-q-1}=\alpha\,.$$

Назовем правым q^*-путем $L^+(\xi,q^*,\alpha)$ правый q-путь задающийся уравнением

$$z=\left[1-\alpha(\varphi-\theta)^{q+1}\right]e^{i\varphi},\ \varphi\in\left(\theta;\theta+\alpha^{-\frac{1}{1+q}}\right].$$

Обозначим через $L^-(\xi,q,\alpha)$ ($L^-(\xi,q^*,\alpha)$), $0<\alpha<\infty, q\geq 0$ и назовем левым q-путем (q^*-путем) образ правого q-пути $L^+(\xi,q,\alpha)$ ($L^+(\xi,q^*,\alpha)$) при симметрии относительно радиуса $h(\xi,0)$ круга D в точке $\xi=e^{i\varphi}\in\Gamma$. Правые и левые q-пути (q^*-пути) назовем q-путями (q^*-путями) $L(\xi,q,\alpha)$ ($L(\xi,q^*,\alpha)$) или просто $L(\xi,q)$ ($L(\xi,q^*)$).

Для произвольных $\alpha>0$, $\beta>0$, $q_1\geq 0$, $q_2\geq 0$, $0<\delta<\frac{1}{2}$ назовем (q_1,q_2)-углом $\left((q_1,q_2)^*\right)$ в точке $\xi\in\Gamma$ и обозначим через $\Delta(\xi,\alpha,\beta,q_1,q_2,\delta)$ ($\Delta^*(\xi,\alpha,\beta,q_1,q_2,\delta)$) или просто $\Delta(\xi,q_1,q_2)$ ($\Delta^*(\xi,q_1,q_2)$), если нас не интересуют размеры этого угла, подобласть круга D, ограниченную двумя разными $L(\xi,q_1,\alpha)$ ($L(\xi,q_1^*,\alpha)$) и $L(\xi,q_2,\beta)$ ($L(\xi,q_2^*,\beta)$) путями (возможен случай $q_1=q_2$) и окружностью $|z-\xi|=\delta$, где δ достаточно малое положительное число.

Пусть Z- произвольное топологическое пространство. Для произвольного отображения f круга D в Z, $f:D\to Z$ произвольной точки $\xi\in\Gamma$ и произвольного множества $S\subset D$, для которого ξ является предельной точкой, предельное множество $C(f,\xi,S)$ определяется как пересечение

$$C(f,\xi,S)=\bigcap_{r>0}\overline{f(V_r(\xi)\cap S)},\text{ где } V_r(\xi)=\{z\in D;|z-\xi|<r\},r>0$$

и черта замыкание множества.

При доказательстве формулируемых результатов понадобится следующее утверждение, доказанное в работе Уэстона [5].

(A) Если K - компактное подмножество из Z, $K\subset Z$ и S произвольное подмножество из D, для которого $\xi\in\Gamma$ является предельной точкой и $K\cap C(f,\xi,S)=\varnothing$, то существует такая окрестность:

$$U=\{Z\in D;|z-\xi|<\delta\},0<\delta<\frac{1}{2},\text{ что } \overline{f(U\cap S)}\cap K=\varnothing.$$

Следуя В. И. Гаврилову [6], последовательность точек $\{z_n\},z_n\in D,n=1,2,\dots$, $\lim_{n\to\infty}|z_n|=1$ называют P-последовательностью для произвольной функции $f:D\to\Omega$, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{z_{n_\nu}\}$ и любого $\varepsilon>0$ функция $f(z)$ принимает в объединении неэвклидовых кругов $D(z_{n_\nu},\varepsilon)=\{z\in D;\sigma(z,z_{n_\nu})<\varepsilon\}$ бесконечно часто каждое значение $\omega\in\Omega$, кроме быть может, двух значений.

Пусть f произвольная функция $f:D\to\Omega$ и A произвольное конечное множество неотрицательных чисел. Жорданову кривую K_ξ, лежащую в круге D и оканчивающуюся в точке $\xi\in\Gamma$, назовем линией Жюлиа для функции $f(z)$, если при любом $\varepsilon>0$ на множестве

$$D(K_\xi,\varepsilon)=\bigcup_{\alpha\in K_\xi}D(\alpha,\varepsilon)$$

функция $f(z)$ принимает бесконечно часто каждое значение $\omega\in\Omega$, кроме, быть может, двух значений. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесем к множеству $J_A(f)$ и назовем точкой Жюлия [7], если любой q-путь $L(\xi,q),q\in A$ является линией Жюлия для $f(z)$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесем к множеству точек Плеснера $I_A(f)$, если для любого (q_1,q_2) - угля $\Delta(\xi,q_1,q_2),q_1,q_2\in A$, имеем

$$C(f,\xi,\Delta(\xi,q_1,q_2))=\Omega.$$

Точку $\xi\in\Gamma$ отнесем к множеству $I^*_A(f)$, если каждый q-путь $L(\xi,q)$, $q\in A$ не содержит на одной P-последовательности функции $f(z)$, и для любого q-пути $L(\xi,q),q\in A$ имеем $C(f,\xi,L(\xi,q))=\Omega$. Ясно, что для произвольной функции $f(z):D\to\Omega$ множества $J_A(f)$ и $I^*_A(f)$ являются подмножествами множества $I_A(f)$.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Для произвольного отображения $f: D \to Z$ круга D в локально компактное метризуемое линделефо пространство Z и для произвольного конечного множества A неотрицатеьлных чисел множество $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ.

Доказательство. Пусть $M = \{S_n\}$ счетная база открытых сфер, имеющих компактные замыкания в пространстве Z. Пусть $B = \{(\alpha_j, \beta_k)\}, \alpha_j > 0, \beta_k > 0$ совокупность всех положительных рациональных пар $\alpha_j > 0, \beta_k > 0$ и $A = \{q_i\}, q_i \geq 0$. Для произвольных фиксированных чисел $(\alpha_j, \beta_k) \in B$, $q_i \in A$, $q_r \in A$ и n и m, $n = 1,2,\ldots$, $m = 2,3,\ldots$ обозначим через $H_{n,m,j,k,i,r}$ множество таких точек $\xi \in \Gamma$, для которых

$$f\left(\Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Z \setminus S_n .$$

Покажем, что справедливо следующее разложение:

$$\Gamma \setminus I_A(f) = \cup H_{n,m,j,k,i,r} \tag{1}$$

Поскольку вложение $\cup H_{n,m,j,k,i,r} \subset \Gamma \setminus I_A(f)$ очевидно, то для доказательства обратного вложения допустим, что ξ произвольная точка из множества $\Gamma \setminus I_A(f)$, т.е. существует некоторый (q_i, q_r)- угол $\Delta(\xi, q_i, q_r), q_i, q_r \in A$, для которого $C(f, \xi, \Delta(\xi, q_i, q_r)) \neq Z$. Согласно лемме 3 из [8] найдется $(\alpha_j, \beta_k) \in B$ и такое натуральное число $m_1 \in N$, $m_1 > 2$, что

$$\Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right) \subset \Delta(\xi, q_i, q_r)$$

и, значит

$$C\left(f, \xi, \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \neq Z .$$

Из последнего следует, что существует такая сфера $S_n \in M$, для которой

$$C\left(f, \xi, \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \cap \overline{S_n} = \varnothing .$$

Поэтому, согласно предложению (A) найдется такая окрестность

$$U = \left\{z \in D; |z - \xi| < \frac{1}{m_2}\right\}, m_2 > 2, m_2 \in N ,$$

что

$$f\left(U \cap \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m_1}\right)\right) \cap \overline{S_n} = \varnothing,$$

т.е $\xi \in H_{n,m,j,k,i,r}$, где $m = \max(m_1, m_2)$.

Итак, разложение (1) доказано. Чтобы доказать, что каждое множество $H_{n,m,j,k,i,r}$ из обьединения (1) замкнуто, допустим, что $\xi_0 \in \overline{H}_{n,m,j,k,i,r}$.
Поскольку

$$\Delta^*\left(\xi_0, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right) \subset \bigcup_{\xi \in H_{n,m,j,k,i,r}} \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right),$$

то

$$f\left(\Delta^*\left(\xi_0, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right)\right) \subset Z \setminus S_n,$$

т.е $\xi_0 \in H_{n,m,j,k,i,r}$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Для любой функции f эквиморфной в D, $f: D \to \Omega$ и для любого конечного множества A неотрицательных чисел множество $I^*_A(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ.

Доказательство. Пусть функция f эквиморфная в D имеет каноническое представление $f(z) = g(h(z))$, где $g(z)$- мероморфная функция в D, $g: D \to \Omega$, а $h(z)$ эквиморфизм $h: D \to \Omega$. Пусть $B = (\alpha_j, \beta_k)$- множество всех положительных рациональных пар $\alpha_j > 0, \beta_k > 0$ и $A = \{q_i\}, q_i \geq 0$.

Для произвольных фиксированных чисел $(\alpha_j, \beta_k) \in B$, $q_i \in A, q_r \in A$ и n и m, $n = 1,2,\ldots$ и $m = 2,3,\ldots$, обозначим через $E_{n,m,j,k,i,r}$ множество точек точек $\xi \in \Gamma$, для которых

$$Sup\left[Q_f(z)\right] \leq n, \qquad (2)$$
$$z \in \Delta^*\left(\xi, \alpha_j, \beta_k, q_i, q_r, \frac{1}{m}\right)$$

где

$$Q_f(z) = \left(1 - |h(z)|^2\right)|g'(h(z))|\left(1 + |g(h(z))|^2\right)^{-1}.$$

Обозначим через $K(f)$ множество таких точек $\xi \in \Gamma$, где в любом (q_1, q_2) угле $\Delta(\xi, q_1, q_2), q_1, q_2 \in A$ функция $Q_f(z)$ ограничена. Нетрудно проверить равенство

$$I^*_A(f) = I_A(f) \cap K(f). \qquad (3)$$

Согласно теореме 1, для произвольной функции $f: D \to \Omega$, множество $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ. Кроме того, имеем разложение

$$K(f) = \bigcap_{m,j,k,i,r} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,m,j,k,i,r} ,$$

где множества $E_{n,m,j,k,i,r}$ замкнуты. Следовательно, $K(f)$ множество типа $F_{\sigma\delta}$ на Γ.

Из условия (3) следует, что множество $I^*_A(f)$ имеет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ. Теорема 2 доказана.

Отметим, что в случае, когда f - мероморфная функция в D теорема 1 усиливает теорему 3 из [9], в случае, когда $A=\{0\}$ и f эквиморфная функция в D, теорема 2 установлена в [3], а в случае $A=\{0\}$ и f -мероморфная в D в [10].

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье доказывается, что для произвольного отображения $f: D \to Z$ (где Z локально компактное метризуемое линделефо пространство), множество точек Плеснера $I_A(f)$ имеет тип G_δ на Γ. А также доказывается, что для эквиморфной функции $f: D \to \Omega$ множество $I^*_A(f)$ имееет тип $F_{\sigma\delta}$ на Γ по путям имеющим произвольный порядок касания с единичной окружностью.

REFERENCES

[1] E`.Kollingtvud, A.Lovater. *Teoriia predel`ny`kh mnozhestv.* M. Mir, (1971).
[2] V. I. Gavrilov. “Povedenie vdol` hord meromorfny`kh funktcii` v edinichnom kruge”, *DAN SSSR*, **216**, **1**, str. 21-23, (1974).
[3] KH. E. Mehiia. “Granichny`e svoi`stva e`kvimorfny`kh funktcii`”, *DAN SSSR*, **265**, **1**, s. 35-38, (1982).
[4] V.A. Efremovich. “Geometriia blizosti”. *Matem. Sb.* **31** (**73**), **1**. s. 189-200, (1952).
[5] J. D.Weston “Some Theorems on Cluster Sets”, *J. London Math. Soc*. **33,** 4. p. 435-441, (1958).
[6] V.I. Gavrilov. “O raspredelenii znachenii` meromorfny`kh v edinichnom kruge funktcii`, ne iavliaiushchikhsia normal`ny`mi”. *Matem. Sb.,* **67(109), 3**, 408-427, (1965).
[7] V.I. Gavrilov. “Ob odnoi` teoreme Kartrai`t i Kollingvuda, kasaiushchei`sia classifikatcii i raspredeleniia osobennostei` meromorfny`kh funktcii` na granitce”. *Vestneyk MGU*, **4**. s. 36-43, (1976).
[8] M.M. Mirzoian. “O teoremakh maksimal`nosti dlia proizvol`ny`kh i meromorfny`kh funktcii` po kasatel`ny`m napravleniiam”. *DAN Arm SSR*, **66**, **4**, s. 200-204, (1978).
[9] M.M. Mirzoian. “Harakteristika granichny`kh osobennostei` meromorfny`kh funktcii` i funktcii`, porazhdaemy`kh predel`ny`mi mnozhestvami vdol` kasatel`ny`kh napravlenii`”. *DAN Arm. SSR*, **66**, **5**, s. 263-266, (1978).
[10] A.N. Kanatneykov. “Obrashchenie teoremy` Mei`era dlia meromorfny`kh funktcii`”. *DAN SSSR*, **238**, **5**, s. 1043-1046, (1978).

Поступила в редакцию 10.11.2014.