MATHEMATICA MONTISNIGRI
Vol XXXIV (2015)

О НАИЛУЧШЕЙ ОЦЕНКЕ ТЕЙЛОРОВСКИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ФУНКЦИЙ КЛАССА $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

И. В. ОГАНИСЯН *

*Армянский национальный политехнический университет
Ереван, Армения

e-mail: ishkhanh@gmail.com

Ключевые слова: классы Островского и Джрбашяна, коэффициенты Тейлора, интегральное представление.

Анотация. В данной работе известные оценки для тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha(-1<\alpha\le 0)$ распространяется на все значение $\alpha\in(-1;+\infty)$. Устанавливается их неулучшаемость и получается интегральное представление для этих функций.

ON THE BEST ESTIMATION FOR TAYLOR COEFFICENTS OF FUNCTIONS OF CLASSES $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$

I. V. HOVHANNISYAN*

* National Polytechnic University of Armenia
Yerevan, Armenia

e-mail: ishkhanh@gmail.com

Summary. In this paper we prove the best estimations for Taylor coefficients of functions of classes $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ introduced by M. M. Djrbashyan. Also an integral representation is found for these functions.

.

2010 Mathematics Subject Classification: 30J10, 31A20, 32A35.
Key words and Phrases: Ostrovski and Djrbashyan clasess, Taylor coefficients, integral representation.

1 ВВЕДЕНИЕ

Классам аналитических в единичном круге функций посвящены многочисленные исследования. Среди них важное место занимают введенные М. М. Джрбашяном общеизвестные классы $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$, обладающие свойством

$$A_\alpha \subset A_0 \ \left(-1<\alpha<0\right),$$

$$A_0 \subset A_\alpha \ \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

где $A_0 \equiv A$ - известный класс Островского.

Согласно хорошо известной теореме Р. Неванлинны[1,2] класс A аналитических в круге $|z|<1$ функций для которых

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi} \log^+\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\right\}<+\infty$$

совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих факторизационное представление вида

$$f(z)=e^{i\alpha}z^\lambda B(z)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\psi(\theta)\right\},\ |z|<1,$$

где $\alpha\left(\mathrm{Im}\alpha=0\right)$ - постоянная, $\lambda>0$ - целое число, $B(z)$ функция Бляшке

$$B\left(z;z_k\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\overline{z}_k z}\frac{|z_k|}{z_k}$$

и $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$.

Для функции класса A С. Н. Мергеляном[2] получена оценка тейлоровских коэффициентов

$$|a_n|\le \exp\left\{2\sqrt{cn}\left(1+o(1)\right)\right\}, n\to\infty. \tag{1}$$

Обозначим через $A_\alpha\left(-1<\alpha<+\infty\right)$ класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию[3]

$$\underset{0<r<1}{Sup}\left\{\int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right| d\varphi\right\}<+\infty,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|=\begin{cases} D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|, \ D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\ge 0,\\ 0, D^{-\alpha}\log\left|f\left(re^{i\varphi}\right)\right|\le 0,\end{cases}$$

$D^{-\alpha}$ - интегра-дифференциальный оператор произвольного порядка в смысле Римана – Лиувилля с началом в нулевой точке, который определяется следующим образом:

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt, \left(0<\alpha<+\infty\right),$$

$$D^{-\alpha}f(r)\equiv\frac{d}{dr}D^{-(1+\alpha)}f(r), \left(-1<\alpha<0\right).$$

Для специального случая $\alpha=0$ оператор D^0 определяется как тождественный оператор, т.е.

$$D^0 f(r) \equiv f(r).$$

Напомним основную теорему М. М. Джрбашяна о факторизации классов A_α :

Класс $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих представаление вида

$$f(z) = Cz^\lambda B_\alpha(z; z_k) \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right) d\psi(\theta)\right\}, \tag{2}$$

где C - постоянная, λ - целое число, $\psi(\theta)$ - вещественная функция с конечным полным изменением на $[0,2\pi]$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}. \tag{3}$$

$B_\alpha(z; z_k)$ - сходящиеся в круге $|z|<1$ произведения Джрбашяна

$$B_\alpha(z; z_k) = \prod_{k=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{-W_\alpha(z; z_k)}, \tag{4}$$

где

$$W_\alpha(z;\xi) = \int_{|\xi|}^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^\infty \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \cdot$$

$$\cdot\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\xi|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx - \bar{\zeta}^k \int_{|\xi|}^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx\right\} z^k, \tag{5}$$

при условии

$$\sum_{k=1}^\infty \left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha} < +\infty. \tag{6}$$

С. С. Степаняном[4] получена неулучшаемая оценка тейлоровских коэффициентов для функций классов $A_\alpha(-1<\alpha\le 0)$

$$|a_n| \le \exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ n\to\infty,$$

которая при значении параметра $\alpha=0$ совпадает с оценкой (1).

Обозначим через $A_\alpha^*(-1<\alpha<+\infty)$ множество тех функций из A_α в представлении (2) которых функция $\psi(\theta)$ не возрастающая.

Классы $A_\alpha^*(-1<\alpha<0)$ являются некоторыми подклассами ограниченных аналитических функций класса A_α. Для тейлоровских коэффициентов этих функций (в том числе и для произведений B_α) известна[5] более точная оценка:
если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n,\ |z|<1$$

принадлежит классу $A_\alpha^*(-1<\alpha\le 0)$, то имеет место оценка

$$|a_n| = O(n^\alpha),\ n\to\infty.$$

В работе[6] для одного фактора произведений B_α

$$b_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)\exp\left\{-W_\alpha(z;\zeta)\right\}$$

получена оценка

$$\left|b_\alpha(z;\zeta)\right|\le\exp\left\{const\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\frac{\bar{\zeta}z}{|\zeta|}}\right|^{1+\alpha}\right\},\ -1<\alpha<+\infty. \tag{7}$$

При $\alpha\in(-1;0]$, так как $\left|b_\alpha(z;\zeta)\right|\le 1,$ то оценка (7) является слишком грубым.

2 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Следующая теорема распространяет указанную оценку Степаняна на все значения параметра $\alpha\in(-1;+\infty)$.

Теорема 1. Если функция

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n,\ |z|<1 \tag{8}$$

принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$, то имеет место следующая оценка

$$|a_n|\le\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ n\to\infty, \tag{9}$$

где c_α - некоторая положительная константа.

Доказательство. Для произведения $B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}b_\alpha(z;z_k),|z|<1,|\zeta|<1$ применяя оценку (7), получим

$$\left|B_\alpha(z;z_k)\right|\le\exp\left\{c\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1-|z_k|}{1-\frac{\bar{z}_k z}{|z_k|}}\right|^{1+\alpha}\right\}\le\exp\left\{c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1-|z_k|\right)^{1+\alpha}}{\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}}\right\}.$$

Имея ввиду (6), получим

$$\left|B_\alpha(z;z_k)\right|\le\exp\left\{\frac{c}{\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}}\right\}. \tag{10}$$

С другой стороны из (3) легко следует также

$$\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|S_\alpha\left(e^{-i\theta}z\right)\right|\left|d\psi(\theta)\right|\right\}\le\exp\left\{\frac{c_\alpha}{\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}}\right\}, \tag{11}$$

где $c_\alpha=\frac{\Gamma(1+\alpha)}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|d\psi(\theta)\right|.$

Теперь, допустим, что $f(z)$ принадлежит классу $A_\alpha(-1<\alpha+\infty)$ и имеет разложение вида (8).

Используя (2), (10) и (11), получим

$$\left|f(z)\right| \le \exp\left\{\frac{c_\alpha}{\left(1-|z|\right)^{1+\alpha}}\right\},$$

или, для $0 \le r < 1$ имеем

$$M_f(r) = \max_{0\le\theta<2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| \le \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\}. \tag{12}$$

Воспользовавшись неравенством Коши и имея ввиду (12) для функции (8), можем написать $(0 < r < 1)$

$$|a_n| \le \frac{M_f(r)}{r^n} \le \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\} r^{-n}, \quad n = 0,1,\ldots \tag{13}$$

Найдем минимум функций

$$Y_n(r) = \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r)^{1+\alpha}}\right\} r^{-n},$$

при $0 < r < 1$.

Приравнивая производную функций $Y_n(r)$ к нулю, приходим к уравнению

$$c_\alpha(1+\alpha)r - n(1-r)^{2+\alpha} = 0. \tag{14}$$

Легко видеть, что для любого натурального n уравнение (14) при $\alpha > -1$ имеет единственное решение в промежутке $(0,1)$. Обозначим его через r_n. Из (14) следует, что, если $n \to \infty$, то $r_n \to 1$, поэтому можем написать

$$1 - r_n = \sqrt[\alpha+2]{\frac{c_\alpha(1+\alpha)}{n}}\left(1+o(1)\right), \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Далее, учитывая, что $\ln r_n \sim -(1-r_n)$, $n \to \infty$ и принимая во внимание (13), получим

$$|a_n| \le \exp\left\{\frac{c_\alpha}{(1-r_n)^{1+\alpha}} + n(1-r_n)\right\},$$

где из (15) подставив значение $1-r_n$, окончательно получаем оценку (9).

Теорема доказана.

Пример функции[4] $F_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{c}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\}$, $c > 0$ показывает, что оценка (9) точная. То есть справедлива следующая:

Теорема 2. Оценка (9) неулучшаемая если $\alpha \in (-1;+\infty)$.

Исходя из теорем 1 и 2, можно получить интегральное представление для функций классов $A_\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$.

Теорема 3. Если $f(z) \in A_\alpha(-1 < \alpha < +\infty)$, тогда существует функция $\varphi_\alpha(t) \in L_2$ такая, что имеет место следующее интегральное представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1} \varphi_\alpha(t)\exp\left\{cS_\alpha\left(\bar{t}z\right)\right\}\frac{dt}{t}, \quad |z| < 1,$$

где функция $S_\alpha(z)$ определяется по формуле (3).

Доказательство. Пусть $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n \in A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. Тогда по теореме 1 имеем оценку (9). Рассмотрим функцию

$$F_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{c}{2}S_\alpha(z)\right\}=\exp\left\{-\frac{c}{2}\Gamma(1+\alpha)\right\}\cdot\exp\left\{\frac{c\Gamma(1+\alpha)}{(1-z)^{1+\alpha}}\right\},\text{ где } c>\frac{c_\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

По теореме 2 оценка (9) достигается для функции $F_\alpha(z)\in A_\alpha(-1<\alpha<+\infty)$. Следовательно,

$$F_\alpha(z)=\exp\left\{\frac{c}{2}S_\alpha(z)\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(\alpha)}z^n,$$

где

$$b_n^{(\alpha)}=\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\sqrt[\alpha+2]{c\Gamma(2+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\},\ n\to\infty.$$

Поэтому, имея ввиду неравенство $c_\alpha<c\cdot\Gamma(1+\alpha)$, существует натуральное число N_α, такое, что при $n>N_\alpha$ имеет место неравенство

$$n|a_n|\le n\cdot\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\sqrt[\alpha+2]{c_\alpha(1+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\}<$$

$$<\exp\left\{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\cdot\sqrt[\alpha+2]{c\cdot\Gamma(2+\alpha)n^{1+\alpha}}\left(1+o(1)\right)\right\}=b_n^{(\alpha)}.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\alpha(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{b_n^{(\alpha)}}z^n,\ |z|<1,$$

которая принадлежит классу H_2, так как

$$\lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\varphi_\alpha\left(re^{i\theta}\right)\right|^2d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{\alpha_n}{b_n^{(\alpha)}}\right|^2<\infty.$$

Следовательно, по теореме Фихтенгольца она представима интегралом Коши по своим угловим граничным значениям $\varphi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)$:

$$\varphi_\alpha(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)}{1-ze^{-i\theta}}d\theta,\quad |z|<1.$$

То есть

$$\frac{a_n}{b_n^{(\alpha)}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)e^{-in\theta}d\theta.$$

Откуда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_\alpha\left(e^{i\theta}\right)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}b_n^{(\alpha)}\left(e^{-i\theta}z\right)^n\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\varphi_\alpha(t)\exp\left\{\frac{c}{2}S_\alpha(\bar{t}z)\right\}\frac{dt}{t},\quad |z|<1.$$

Теорема доказана.

Отметим, что доказанное представление для значений параметра $\alpha\in(-1;0]$ получено С.С. Степаняном[7].

3 ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в статье известная оценка для тейлоровских коэффициентов функций класса $A_\alpha\left(-1<\alpha\leq 0\right)$ распространяется на все значения $\alpha\in\left(-1;+\infty\right)$. Она неулучшаемая если $\alpha\in\left(-1;+\infty\right)$. Получается также интегральное представление для этих функций.

REFERENCES

[1] R. H. Nevanlinna, *Odnoznachnye analiticheskie funkcii*, M. Gostekhizdat, (1941).
[2] I. I. Privalov, *Granichnye svojstva analiticheskix funkcij*, 2-e izd. M.-L., (1950).
[3] M. M. Djrbashyan, *Integralnye preobrazovaniya i predstavleniya v kompleksnoj oblasti*, M. Nauka, (1966).
[4] S. S. Stepanyan, "O nailuchshej ochenke Tejlorovskix koefficientak funkcij klassa A_α". *DAN ArmSSR*, **75** (3), 107-113 (1982).
[5] I. V. Hovhannisyan, "Ob odnom predstavlenii funkcii klassa N_α *(-1 < α ≤ 0)", DAN ArmSSR*, **88** (2), 55-60 (1989).
[6] D. T. Bagdasaryan, "Ocenka poryadka rosta proizvedenij B_α M. M. Djrbashyana", *Izv. AN ArmSSR. Matematika*, **25** (4), 401-408 (1990).
[7] S. S. Stepanyan, *Kand. Dis*, Erevan, (1984).

Received Oktober, 15 2015.