

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СВЕТА В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

С.В. ЕРШОВ, А.А. ГАРБУЛЬ, С.Г. ПОЗДНЯКОВ, В.Г. СОКОЛОВ, А.Г. ВОЛОБОЙ

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Москва, Россия  
e-mail: sergei\_65@mail.ru | voloboy@gin.keldysh.ru

**Ключевые слова:** Лучевая трассировка, двойное лучепреломление, одноосные кристаллы, поляризация.

**Аннотация.** Настоящая статья представляет алгоритм расчета взаимодействия светового луча с плоской границей между двумя одноосными кристаллами или между одноосным кристаллом и изотропной средой. Описанный алгоритм использует формализм вектора Стокса и может применяться для лучевой трассировки. В рамках настоящего алгоритма рассмотрен случай, когда лучи разных типов имеют одно и то же или практически неразличимые направления распространения, вследствие чего возникает “смешанное” поляризационное состояние. Представленный алгоритм был успешно применен при моделировании устройства, включающего анизотропные элементы и использующегося в качестве подсвечивающего устройства жидкокристаллического дисплея.

## LIGHTING SIMULATION IN ANISOTROPIC MEDIA

S.V. ERSHOV, A.A. GARBUL, S.G. POZDNYAKOV, V.G. SOKOLOV, A.G. VOLOBOY

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, Russia  
e-mail: sergei\_65@mail.ru | voloboy@gin.keldysh.ru

**Summary.** Modern optical devices can utilize materials with anisotropic refractive properties. For example, in LCD where light propagation is controlled through changing of polarization state the anisotropic elements can be included before or after the liquid crystal layer to improve uniformity of illumination. Currently most of new devices are elaborated with help of computer simulation and design. Therefore we need light simulation algorithms supporting anisotropic media for computer design of similar optical devices.

The paper presents an approach for lighting simulation in birefringent media. The base lighting simulation uses the forward Monte-Carlo ray tracing technique. The proposed algorithm provides calculation of transformation of a light ray on a boundary between two media, of which one or both can be a birefringent (uniaxial) crystal.

Light propagation in anisotropic media (crystals) and its interaction with a boundary between two media, anisotropic or isotropic, had been investigated in classical optics long ago and all base relations is well known. These relations however operate wave optics parameters: the input and output are wave vector of plane waves and complex amplitudes of fields in them. The practi-

**2010 Mathematics Subject Classification:** 65Z05, 68-04, 78-04.

**Key words and Phrases:** Ray tracing, Birefringence, Uniaxial, Crystal, Polarization

cal implementation of light propagation calculations varies. We hope that our variant is convenient for the use in ray tracing programs which employ ray optics and Stokes representation of polarization.

It is well known that a light wave in crystal can be only purely linearly polarized, and this is usually applied to rays too. Meanwhile formally light ray can consist of two different waves that have the same direction of energy flow, and so can have a mixed polarization state. Rays of this type can arise due to a specially tuned layout of the optical system, or they can arise in a usual ray tracing when the scattered rays have very close directions which are indistinguishable for the current simulation. For example, if a crystal is illuminated with two waves of different polarization so that the first of them refracts into an ordinary and the second into an extraordinary waves such that their rays coincide.

Our approach is able to process both usual “pure” rays and these mixed state rays. We describe ambiguity in definition of the Stokes parameters inside a uniaxial medium while resolves in the isotropic medium. Therefore if the light source and light detector are both outside of the crystal (usually it is so) the Stokes formalism works correctly for the starting and ending ray state in spite of the ambiguity in the middle part of the trajectory.

The algorithm was integrated in the lighting simulation system Lumicept. It has been successfully applied to simulation of a plain light emitter device with embedded anisotropic elements. The device is a plane light emitter for an LCD display. It consists of flat light guiding plate with reflectors attached to its bottom and side faces and array of LEDs (light sources) attached to one of the sides. Light enters into the LGP at angles very tangent to its top and bottom faces. So in absence of scattering it would propagate the LGP without leaving it. But the LGP is glued to the top layer which is not homogeneous: long anisotropic cylinders are sealed inside it. For these cylinders ordinary refraction coincides with that of main media while extraordinary differs from it. As a result they scatter only extraordinary waves. This scattering makes the light to leave. In the result of device simulation and computer design we succeeded to obtain the distribution of anisotropic tubes inside layer which allows getting the uniform spatial distribution of illuminance of the output device surface.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Современная оптическая индустрия использует материалы с анизотропным показателем преломления. Естественно использовать такие материалы для улучшения качества изображения в жидкокристаллических дисплеях, где яркость пикселей управляется с помощью изменения поляризации. В статье описывается оригинальный подход, разработанный для моделирования подобных устройств.

Одним из возможных применений представленного алгоритма является моделирование радиометрических характеристик оптических устройств, включая поляризационное состояние излучения. Описываемый подход может быть также применен для получения реалистических изображений ювелирных изделий<sup>1</sup>. В этом случае главную роль играют расщепление лучей и двойное лучепреломление, а поляризационное состояние рассеянного света не столь существенно.

В случае изотропных материалов реализации таких приложений в компьютерной графике очень близки: для вычисления радиометрических характеристик используется прямая Монте-Карло трассировка лучей света, а для визуализации – детерминистическая обратная трассировка. Современные алгоритмы трассировки поддерживают поляризацию для изотропных сред. Естественно модифицировать существующую трассировочную процедуру для случая анизотропных сред. Это означает, что для трассируемого луча нужно использовать и запоминать только поляризационное состояние и направление распространения без запоминания его волнового вектора, направления поля и т.п.

## 2. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ

Распространение света в анизотропных средах и его взаимодействие с границами между такими средами, изотропными и анизотропными, были исследованы достаточно давно. Все основные соотношения, описывающие эти процессы, получены еще во времена Френеля и Стокса. Однако эти соотношения используют волновые характеристики: волновые векторы падающей и уходящих волн, а также комплексные амплитуды их полей. Априори неизвестно, достаточно ли для описания только лучевых характеристик: вектора Стокса и направления распространения, а также в каком виде эти характеристики должны быть использованы.

В литературе описан ряд методов решения подобных задач, которые могут быть названы “поляризационная лучевая оптика кристаллов”. Вслед за наиболее известными публикациями<sup>2,3</sup> последовали более поздние исследования<sup>4,5</sup>. Несмотря на то, что проблемы, рассмотренные в этих публикациях, были очень близки, разные авторы применяли несколько различные подходы, наиболее адаптированные для рассмотренных случаев.

Естественно, что формулы в этих публикациях приводят к одним и тем же результатам, поскольку они используют одну и ту же электромагнитную теорию. Статьи отличаются деталями формулировок, качеством изложения и легкостью понимания. Относительно этих публикаций некоторые авторы отмечают<sup>4</sup>: “...математические выводы трудно понять, потому что некоторые важные шаги и промежуточные формулы отсутствуют. А формулы, провозглашенные конечными результатами, очень трудно использовать...”. Кроме этого, следует заметить, что нередко обозначения используются безо всяких объяснений. Таким образом, работа продолжается в попытке найти более понятную, простую и исчерпывающую формулировку. Настоящая публикация является еще одним шагом в этом направлении (который, по-видимому, также может быть подвергнут критике). В статье рассматри-

вается только случай одноосных сред (двойное лучепреломление). Наш подход ближе к подходам в статьях<sup>4,5</sup>, и отличается от<sup>2,3</sup> тем, что не используются итерационные процедуры. В отличие от подхода, описанного в статье<sup>4</sup>, в настоящей работе рассматривается падение света из анизотропной среды. Наш подход ближе к подходу статьи<sup>5</sup>, но у нас используется формализм вектора Стокса.

## 2.1 Лучи смешанного типа в кристаллах

В настоящей работе мы не используем ограничение, общее во всех предыдущих работах, заключающееся в том, что в кристалле луч может соответствовать только либо обыкновенной, либо необыкновенной волнам, и поэтому может иметь только линейную поляризацию. Фактически такое ограничение неточно, потому что в кристалле возможно смешанное поляризационное состояние, соответствующее суперпозиции обыкновенной и необыкновенной волн с совпадающими направлениями распространения. И хотя такая ситуация возникает только при выполнении ряда условий, она должна быть учтена в аккуратном оптическом моделировании. Например, возможна ситуация когда кристалл освещен двумя световыми волнами с разными поляризациями, направления преломленных лучей для обеих освещающих волн совпадают и при этом одна из волн порождает обыкновенную волну, а другая — необыкновенную.

Обычно (но не всегда) “смешанный” луч в кристалле сам порождает “чистые” лучи с заметно отличающимися направлениями распространения. Однако возможно, что направления лучей для обыкновенного и необыкновенного отраженного (или преломленного) света совпадут или будут очень близки. Учтем также, что в любой оптической системе с конечными размерами “параллельный” свет фактически представляет собой слегка расходящийся пучок. Поэтому не имеет смысла рассматривать лучи, чьи направления распространения различаются менее некоего порогового значения (например, 1 угловая секунда), как различные. Такие лучи следует объединить, при этом возникает “смешанное” состояние луча.

Наш подход можно считать обобщением подхода в статье<sup>4</sup>. У нас также используются направление луча и его вектор Стокса, что позволяет при моделировании использовать расширение лучевой трассировки, первоначально разработанной для изотропного случая<sup>6</sup>. Модифицированная трассировка использовалась для моделирования плоского подсвечивающего устройства жидкокристаллического дисплея.

## 2.2 Параметры Стокса в кристаллах

Определение вектора Стокса внутри анизотропных сред сталкивается с известными трудностями. В изотропном случае вектор Стокса можно задать, используя средние квадраты компонент электрического поля, либо с помощью потока энергии после прохождения пучка света через соответствующие поляризаторы. Оба определения эквивалентны. Для кристалла такие определения отличаются: поток энергии есть средний квадрат поля, умноженный на волновое число, различающееся для обыкновенной и необыкновенной компонент.

Определение, использующее поляризаторы, вообще нетривиально. Даже если представить, что поляризатор помещен внутри анизотропной среды, его взаимодействие со световым пучком будет существенно иным, чем в вакууме или воздухе.

Подобно подходу<sup>4</sup> мы будем использовать определение вектора Стокса с помощью среднего квадрата электрического поля, поскольку оно проще. И даже для такого определения трудно себе представить процесс измерения вектора Стокса внутри кристалла. Вследствие этого проверить результаты моделирования можно лишь после того, как луч света покинет кристалл. Следует заметить, что используемое определение через средний квадрат поля однозначно и эквивалентно другим используемым определениям.

### 3. ОБОЗНАЧЕНИЯ И СИСТЕМА КООРДИНАТ

Граница между двумя средами есть плоскость  $z = 0$ , нормаль к границе есть вектор  $\mathbf{n} = (0,0,1)$ , направление падающего луча имеет отрицательную  $z$ -компоненту.

Оптическая ось задается с помощью вектора  $\mathbf{a}$  (он может быть различным для соприкасающихся сред).

Угол между  $\mathbf{a}$  и волновым вектором  $\mathbf{k}$  равен  $\beta$ , угол между  $\mathbf{a}$  и вектором  $\mathbf{s}$ , задающим направления распространения луча, есть  $\alpha$ .

Стоксовский орт  $\mathbf{e}$  выбирается так, чтобы направление электрического поля для обыкновенного луча было равно  $\mathbf{e} = \mathbf{a} \times \mathbf{s}$ . Если для падающего луча это соотношение не выполняется, то происходит поворот локальной системы координат, который также изменяет вектор Стокса.

Индексы “o” и “e” соответствуют обыкновенной и необыкновенной волнам. Коэффициенты преломления обозначаются  $\eta$  (обыкновенный —  $\eta_o$ , необыкновенный —  $\eta_e$ ). Длина волны есть  $\lambda$ . Обыкновенное волновое число равно  $k_o \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \eta_o$  (для необыкновенного пучка волновое число зависит от направления распространения),  $\rho \equiv \eta_o / \eta_e$ .

### 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛУЧА ПРИ ТРАССИРОВКЕ

Отметим, что для луча нам необходимо знать его направление и вектор Стокса. Во время трассировки используются волновые вектора, но только в качестве временных величин при вычислении взаимодействия луча с границей. После того, как взаимодействие луча с границей определено, они “забываются”. Поэтому можно считать, что лучевая трассировка не знает об этих волновых векторах. Преобразование луча состоит из вычисления направлений рассеянных лучей и векторов Стокса уходящих лучей.

#### 4.1 Вычисление направлений рассеянных лучей

В общем случае падающий свет есть суперпозиция двух падающих обыкновенной и необыкновенной волн, имеющих одинаковое направление распространения. Уходящий свет, в общем случае, является суммой волн, порожденной обыкновенной и необыкновенной падающими волнами.

Сначала происходит вычисление волновых векторов  $\mathbf{k}$  обыкновенной и необыкновенной волн для текущего направления падения  $\mathbf{s}$ . Заметим, что  $\mathbf{s}$  есть единичный вектор. Направление обыкновенной волны совпадает с лучевым направлением:

$$\mathbf{k}_o = s \mathbf{k}_o \quad (1)$$

Направление необыкновенной волны вычисляется, используя тот факт, что волновой вектор  $\mathbf{k}$ , оптическая ось  $\mathbf{a}$  и направление луча  $\mathbf{s}$  принадлежат к одной плоскости, и что угол  $\alpha$  между направлением луча и оптической осью равен<sup>8</sup>

$$\tan \alpha_e = \rho^2 \tan \beta_e$$

Итак, вводя вектор, лежащий в плоскости, образованной векторами  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{a}$ , и перпендикулярный  $\mathbf{a}$

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{s} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a}}{|\mathbf{s} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{s} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a}}{\sin \alpha_e}$$

получаем

$$\mathbf{k}_e = \text{const} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} \tan \beta_e) = \text{const}'' \times ((\rho^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a} + \mathbf{s}) \quad (2)$$

Константа определяется длиной волнового вектора<sup>8</sup>

$$(1 - \rho^2)(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{a})^2 + \rho^2(\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{k}_e) = k_o^2 \quad (3)$$

В результате находим,

$$\mathbf{k}_e = \frac{k_o}{\rho} \frac{\mathbf{s} + (\rho^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{a}}{\sqrt{1 + (\rho^2 - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})^2}} \quad (4)$$

На втором шаге с помощью выражений (1) и (4) вычисляются направления уходящих (рассеянных) волн. Рассеяние “чистой” падающей волны хорошо известно<sup>7,8,9</sup>. В общем случае “чистая” падающая волна порождает две отраженные волны (обыкновенную и необыкновенную) и две преломленные волны, также обыкновенную и необыкновенную. Всего рассеянных волн может быть  $2 \times 4 = 8$ , часть из них может затухать. Естественно, для затухающих волн лучи не возникают.

Алгоритм вычислений прост: сначала выбирается локальная координатная система так, что ось  $O_z$  совпадает с нормалью, которая направлена в сторону падающего луча, а ось  $O_x$  совпадает с направлением касательной компоненты  $\mathbf{k}_{incid}$  волнового вектора падающей волны.

Волновые векторы распространяющихся рассеянных волн лежат в плоскости падения<sup>7</sup>, касательные компоненты всех четырех волновых векторов равны  $k_{x,incid}$  (ibid), а  $y$ -компоненты равны 0 из-за нашего выбора системы координат. Во всех формулах далее нужно использовать показатели преломления  $\eta_o, \eta_e, \rho \equiv \eta_o / \eta_e$  той среды, в которой распространяется рассеянный луч.

Волновой вектор для обыкновенной уходящей волны равен:

$$\mathbf{k}_o = \left\{ k_{x,incid}, 0, \pm \sqrt{k_o^2 - k_{x,incid}^2} \right\} \quad (5)$$

где знак “+” соответствует отражению, а знак “-” преломлению. Для обыкновенных волн направление луча совпадает с направлением волнового вектора:

$$\mathbf{s} = \mathbf{k}_o / |\mathbf{k}_o| \quad (6)$$

Для необыкновенной уходящей волны (3) есть квадратное уравнение относительно неизвестной нормальной компоненты  $k_{e,z}$ . Оно имеет два корня

$$k_{e,z} = k_{x,\text{incid}} \frac{(\rho^2 - 1)a_x a_z}{\rho^2(1 - a_z^2) + a_z^2} \pm k_o \frac{\sqrt{\rho^2(1 - a_z^2) + a_z^2 - \frac{(a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 \rho^2)\rho^2}{k_o^2}} k_{x,\text{incid}}^2}{\rho^2(1 - a_z^2) + a_z^2} \quad (7)$$

Из них нужно выбрать тот, который соответствует направлению распространения “от границы”.

Напомним, что для необыкновенной волны направление распространения может быть представлено в виде  $s = \text{const} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b} \tan \alpha_e)$ , где  $\mathbf{b}$  перпендикулярен  $\mathbf{a}$  (см. (2)):

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{k}_e - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)\mathbf{a}}{|\mathbf{k}_e - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{k}_e - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)\mathbf{a}}{\sqrt{1 - (\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{s})^2}} \equiv \frac{\mathbf{k}_e - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)\mathbf{a}}{\sin \beta_e}$$

а направление распространения имеет вид:

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}_e + (\rho^{-2} - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)\mathbf{a}}{\sqrt{k_e^2 + (\rho^{-4} - 1)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{k}_e)^2}} \quad (8)$$

Используя (7) и (8), после несложных вычислений находим знак нормальной компоненты:

$$\text{sgn } s_{e,z} = \text{sgn} \left( \pm k_o \sqrt{\rho^2(1 - a_z^2) + a_z^2 - \frac{(a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 \rho^2)\rho^2}{k_o^2}} k_{x,\text{incid}}^2 \right)$$

где знаки точно такие же, как и в (7). Поэтому знак «+» берётся для отражения, а «-» – для преломления. Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} k_{e,x} &= k_{x,\text{incid}} \\ k_{e,y} &= 0 \\ k_{e,z} &= \frac{(\rho^2 - 1)a_x a_z k_{x,\text{incid}}}{\rho^2 + (1 - \rho^2)a_z^2} \pm \frac{\sqrt{(1 - \rho^2)(a_z^2 k_o^2 + k_{x,\text{incid}}^2 \rho^2 a_y^2) + \rho^2(k_o^2 - k_{x,\text{incid}}^2)}}{\rho^2 + (1 - \rho^2)a_z^2} \end{aligned} \quad (9)$$

знак “+” для отражения и знак “-” для преломления.

Заметим, что когда  $k_{x,\text{incid}} > k_o \sqrt{\frac{\rho^2(1 - a_z^2) + a_z^2}{(a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 \rho^2)\rho^2}}$  уходящая необыкновенная волна становится затухающей.

Для случая затухающих волн используются те же самые уравнения, как и для распространяющихся волн. Отличие только в том, что волновой вектор становится комплексным. Скалярное произведение определяется обычной формулой:

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \equiv u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Здесь комплексное сопряжение ко второму вектору не применяется. Далее все так же как и для распространяющихся волн. Из двух корней уравнения выбирается тот, для которого величина  $k_z$  соответствует затуханию волны.

Этим завершается вычисление направлений распространения всех уходящих лучей (максимально их 8). Далее эти направления будут обозначаться следующим образом:

$$s_{o \rightarrow o}, s_{o \rightarrow e}, s_{e \rightarrow o}, s_{e \rightarrow e}$$

первая буква индекса задает тип падающего луча, а вторая — тип уходящего. Отметим, что редко, но возможно некоторым уходящим волнам соответствуют лучи с очень близкими направлениями. В этом случае возникает луч со “смешанным” поляризационным состоянием.

## 4.2 Вычисление векторов Стокса уходящих лучей

Если в кристалле направление уходящего луча  $s$  (одного из 8) достаточно отличается от остальных, то луч имеет “чистую” линейную поляризацию, которая определяется его типом. Если же направления нескольких уходящих лучей “неразличимы”, то такие лучи “сливаются”, и в результате возникает смешанное поляризационное состояние.

Вычисление векторов Стокса происходит следующим образом:

- а) Сначала вычисляются френелевские коэффициенты (отношение амплитуд электрического поля уходящей и падающей волн, в общем случае комплексные) для каждой из 8 возможных комбинаций падение–рассеяние. Здесь они будут обозначены так:

$$R_{o \rightarrow o}, R_{o \rightarrow e}, R_{e \rightarrow o}, R_{e \rightarrow e}; \quad T_{o \rightarrow o}, T_{o \rightarrow e}, T_{e \rightarrow o}, T_{e \rightarrow e}$$

$R$  обозначает отражение, а  $T$  — преломление; индексы задают типы падающих и уходящих лучей. Например,  $R_{e \rightarrow o}$  есть отношение амплитуд электрического поля для отраженного обыкновенного луча и падающего необыкновенного. Метод вычисления этих величин хорошо известен; используемый нами вариант описан в Приложении.

- б) Далее с помощью френелевских коэффициентов вычисляется матрица Мюллера, связывающая падающий и рассеянные векторы Стокса, и происходит умножение падающего вектора Стокса на полученную матрицу, как показано в формуле (15).

Очевидно, что и в “чистом”, и в “смешанном” лучах компонента электрического поля  $E_{\parallel}$ , параллельная стоксовскому орту, может возникать только благодаря обыкновенным (уходящим) волнам, соответствующим этому лучу. Совершенно аналогично, компонента  $E_{\perp}$  возникает только благодаря необыкновенным (уходящим) волнам. Из-за возникновения суперпозиции амплитуда электрического поля для уходящего луча  $s$  будет равна:

$$\begin{aligned} E_{\parallel}^{(\text{out})} &= \delta_{s_{o \rightarrow o}, s} F_{o \rightarrow o} E_{\parallel}^{(\text{in})} + \delta_{s_{e \rightarrow o}, s} F_{e \rightarrow o} E_{\perp}^{(\text{in})} \\ E_{\perp}^{(\text{out})} &= \delta_{s_{o \rightarrow e}, s} F_{o \rightarrow e} E_{\parallel}^{(\text{in})} + \delta_{s_{e \rightarrow e}, s} F_{e \rightarrow e} E_{\perp}^{(\text{in})} \end{aligned} \quad (10)$$

где  $F$  есть френелевский амплитудный коэффициент ( $R$  или  $T$  в зависимости от того какой луч рассматривается: отраженный или преломленный), а



$$\delta_{\mathbf{u},\mathbf{v}} \equiv \begin{cases} 1, & \mathbf{u} \approx \mathbf{v} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (11)$$

Суммирование выполняется по всем уходящим лучам, имеющим направление  $s$  (или направление, неразлично близкое к нему). Нужно только вычислить произведение  $F$  и  $\delta$ , которое является функцией направления падающего луча и направления  $s$ :

$$\Phi_{o \rightarrow e} \equiv \delta_{s_{o \rightarrow e}, s} F_{o \rightarrow e} \quad (12)$$

Порог неразличимости направлений (“приближенного совпадения”) определяется характеристиками рассматриваемой задачи. По крайней мере, если характерный размер оптической системы есть  $L$ , то направления лучей, находящихся в угловом интервале  $\sim O(\lambda/L)$  можно считать неразличимыми (дифракционный порог).

По определению вектор Стокса уходящего луча есть

$$\begin{aligned} I^{(\text{out})} &= \langle |E_{\parallel}^{(\text{out})}|^2 \rangle + \langle |E_{\perp}^{(\text{out})}|^2 \rangle \\ Q^{(\text{out})} &= \langle |E_{\parallel}^{(\text{out})}|^2 \rangle - \langle |E_{\perp}^{(\text{out})}|^2 \rangle \\ U^{(\text{out})} &= 2 \operatorname{Re} \langle E_{\perp}^{(\text{out})} (E_{\parallel}^{(\text{out})})^* \rangle \\ V^{(\text{out})} &= 2 \operatorname{Im} \langle E_{\perp}^{(\text{out})} (E_{\parallel}^{(\text{out})})^* \rangle \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя компоненты электрического поля из (10), вычисляем средние квадраты поля:

$$\begin{aligned} \langle |E_{\parallel}^{(\text{out})}|^2 \rangle &= |\Phi_{o \rightarrow o}|^2 \langle |E_{\parallel}^{(\text{in})}|^2 \rangle + |\Phi_{e \rightarrow o}|^2 \langle |E_{\perp}^{(\text{in})}|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} (\Phi_{o \rightarrow o} \Phi_{e \rightarrow o}^* \langle E_{\parallel}^{(\text{in})} (E_{\perp}^{(\text{in})})^* \rangle) \\ \langle |E_{\perp}^{(\text{out})}|^2 \rangle &= |\Phi_{o \rightarrow e}|^2 \langle |E_{\parallel}^{(\text{in})}|^2 \rangle + |\Phi_{e \rightarrow e}|^2 \langle |E_{\perp}^{(\text{in})}|^2 \rangle + 2 \operatorname{Re} (\Phi_{o \rightarrow e} \Phi_{e \rightarrow e}^* \langle E_{\parallel}^{(\text{in})} (E_{\perp}^{(\text{in})})^* \rangle) \\ \langle E_{\perp}^{(\text{out})} (E_{\parallel}^{(\text{out})})^* \rangle &= \Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} \langle |E_{\parallel}^{(\text{in})}|^2 \rangle + \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow e} \langle |E_{\perp}^{(\text{in})}|^2 \rangle \\ &\quad + \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} \langle E_{\parallel}^{(\text{in})} (E_{\perp}^{(\text{in})})^* \rangle + \Phi_{e \rightarrow e}^* \Phi_{o \rightarrow o} \langle (E_{\parallel}^{(\text{in})})^* E_{\perp}^{(\text{in})} \rangle \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя это в (13) и выражая средние квадраты падающего луча через его вектор Стокса:

$$\begin{aligned} \langle E_{\parallel}^{(\text{in})} (E_{\perp}^{(\text{in})})^* \rangle &= (U^{(\text{in})} - iV^{(\text{in})})/2 \\ \langle |E_{\parallel}^{(\text{in})}|^2 \rangle &= (I^{(\text{in})} + Q^{(\text{in})})/2 \\ \langle |E_{\perp}^{(\text{in})}|^2 \rangle &= (I^{(\text{in})} - Q^{(\text{in})})/2 \end{aligned}$$

окончательно получаем:

$$\begin{aligned}
 I^{(out)} &= \frac{|\Phi_{o \rightarrow o}|^2 + |\Phi_{o \rightarrow e}|^2 + |\Phi_{e \rightarrow o}|^2 + |\Phi_{e \rightarrow e}|^2}{2} I^{(in)} \\
 &+ \frac{|\Phi_{o \rightarrow o}|^2 + |\Phi_{o \rightarrow e}|^2 - |\Phi_{e \rightarrow o}|^2 - |\Phi_{e \rightarrow e}|^2}{2} Q^{(in)} \\
 &+ \operatorname{Re}(\Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow o}^* + \Phi_{o \rightarrow e} \Phi_{e \rightarrow e}^*) U^{(in)} + \operatorname{Im}(\Phi_{o \rightarrow o} \Phi_{e \rightarrow o}^* + \Phi_{o \rightarrow e} \Phi_{e \rightarrow e}^*) V^{(in)} \\
 Q^{(out)} &= \frac{|\Phi_{o \rightarrow o}|^2 - |\Phi_{o \rightarrow e}|^2 + |\Phi_{e \rightarrow o}|^2 - |\Phi_{e \rightarrow e}|^2}{2} I^{(in)} \\
 &+ \frac{|\Phi_{o \rightarrow o}|^2 - |\Phi_{o \rightarrow e}|^2 - |\Phi_{e \rightarrow o}|^2 + |\Phi_{e \rightarrow e}|^2}{2} Q^{(in)} \\
 &+ \operatorname{Re}(\Phi_{o \rightarrow o} \Phi_{e \rightarrow o}^* - \Phi_{o \rightarrow e} \Phi_{e \rightarrow e}^*) U^{(in)} + \operatorname{Im}(\Phi_{o \rightarrow o} \Phi_{e \rightarrow o}^* - \Phi_{o \rightarrow e} \Phi_{e \rightarrow e}^*) V^{(in)} \\
 U^{(out)} &= \operatorname{Re}(\Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} + \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow e}) I^{(in)} + \operatorname{Re}(\Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} - \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow e}) Q^{(in)} \\
 &+ \operatorname{Re}(\Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} + \Phi_{e \rightarrow e} \Phi_{o \rightarrow o}^*) U^{(in)} + \operatorname{Im}(\Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} - \Phi_{e \rightarrow e} \Phi_{o \rightarrow o}^*) V^{(in)} \\
 V^{(out)} &= \operatorname{Im}(\Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} + \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow e}) I^{(in)} + \operatorname{Im}(\Phi_{o \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} - \Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{e \rightarrow e}) Q^{(in)} \\
 &+ \operatorname{Im}(\Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} + \Phi_{e \rightarrow e} \Phi_{o \rightarrow o}^*) U^{(in)} - \operatorname{Re}(\Phi_{e \rightarrow o}^* \Phi_{o \rightarrow e} - \Phi_{e \rightarrow e} \Phi_{o \rightarrow o}^*) V^{(in)} \tag{15}
 \end{aligned}$$

Отметим, что по определению (11) величины  $\delta_{s_{o \rightarrow e}, s}$ ,  $\delta_{s_{o \rightarrow o}, s}$  и  $\delta_{s_{e \rightarrow e}, s}$ ,  $\delta_{s_{e \rightarrow o}, s}$  в этих формулах равны 1 только в том случае, когда один и тот же “чистый” (обыкновенный или необыкновенный) падающий луч порождает совпадающие обыкновенный и необыкновенный уходящие лучи. Для кристалла такой случай является редким, поскольку требует “специальных” направлений нормали к поверхности и оптической оси, а также направления распространения луча. Если же уходящий луч преломляется в изотропную среду, то ситуация перестает быть особенной, поскольку в изотропной среде направления обыкновенного и необыкновенного лучей всегда совпадают, а сами лучи отличаются только состоянием поляризации.

## 5. ПРОВЕРКА МЕТОДА

Физическая и математическая основы вышеописанных вычислений прекрасно известны, возможные ошибки могут быть вызваны только ошибками при численном решении используемых уравнений. Чтобы их избежать, были выполнены разнообразные тесты для каждого шага вычислительной процедуры. Например, используя волновой вектор, вычислялись направления и амплитуды полей, а также направления рассеянных лучей. Затем была выполнена проверка на совпадение полных (сумма по всем волнам) полей в переднем и заднем полупространствах. После этого сравнивались полученные направления лучей с направлениями, вычисленными с помощью вектора Пойнтинга. В результате можно вычислить направление и поляризационное состояние падающего луча и сравнить их с входными величинами.

Кроме таких “ограниченных тестов” были выполнены полные тесты для распространения света через кристаллическую призму и тест на образование “Мальтийского креста”. Все тесты прошли успешно.

## 6. МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТРОЙСТВА С ЦИЛИНДРАМИ ИЗ ОДНООСНОГО МАТЕРИАЛА

### 6.1 Описание устройства и параметры моделирования

Моделируемое устройство представляет собой плоский осветитель жидкокристаллического дисплея. Он состоит из светопроводящей пластины (LGP – light guiding plate) с отражателями света, присоединенными к его нижней и боковым поверхностям. Источниками света являются несколько светодиодов, присоединенных к торцу пластины. Эскиз устройства представлен на рисунках 1 и 2.

Свет попадает в пластину по направлениям, близким к касательным к верхней и нижней поверхностям пластины. Верхняя поверхность пластины приклеена к оптически неоднородному и анизотропному слою, состоящему из изотропного материала с включениями в виде длинных параллельных однородных цилиндров с анизотропным показателем преломления. Материал цилиндров является одноосным, обыкновенный показатель преломления которого совпадает с показателем преломления объемлющего вещества. Направление оптической оси материала цилиндров совпадает с направлением геометрических осей цилиндров. Если бы верхний анизотропный слой отсутствовал, то свет распространялся бы только внутри однородной пластины и практически не мог бы из нее выйти за счет полного внутреннего отражения. Анизотропный слой рассеивает необыкновенную составляющую луча, что позволяет рассеянному свету покинуть устройство.

Естественно, мощность выходящего света определяется концентрацией цилиндров в слое. Целью нашего моделирования был поиск такого пространственного распределения концентрации цилиндров, которое бы позволило получить как можно более однородное освещение. Поиск оптимального распределения был сделан с помощью соответствующей процедуры оптимизации. Каждый шаг процедуры состоял из вычисления распределения результирующего излучения при заданном распределении концентрации цилиндров, а затем в изменении распределения концентрации для улучшения пространственной однородности излучения<sup>10,11,12</sup>.

Оптические характеристики частей устройства:

- Верхний слой и цилиндры состоят из прозрачных материалов с чисто френелевскими свойствами. Материал цилиндров одноосный, оптическая ось направлена вдоль цилиндра; показатели преломления:  $\eta_e = 1.88$  и  $\eta_o = 1.558$ . Объемлющее вещество имеет изотропный показатель преломления, равный обыкновенному показателю преломления вещества цилиндров — 1.558.
- Все поверхности LGP имеют чисто френелевские свойства. Показатель преломления материала однородной пластины равен 1.49.
- Отражатели на поверхности расположения светодиодов и на противоположной ей являются Ламбертовскими поверхностями с альбедо 0.96.
- Нижний и боковые отражатели — зеркала с коэффициентом отражения 0.9.
- Поверхность светодиодов являются Ламбертовскими с альбедо 0.5. Излучающая поверхность светодиода — прямоугольник 4.5x2.5 мм вдоль осей Y и Z соответственно. Угловое распределение излучения светодиодов подчиняется закону Ламберта. Каждый из 9 светодиодов излучает поток в 11.11 люмен.

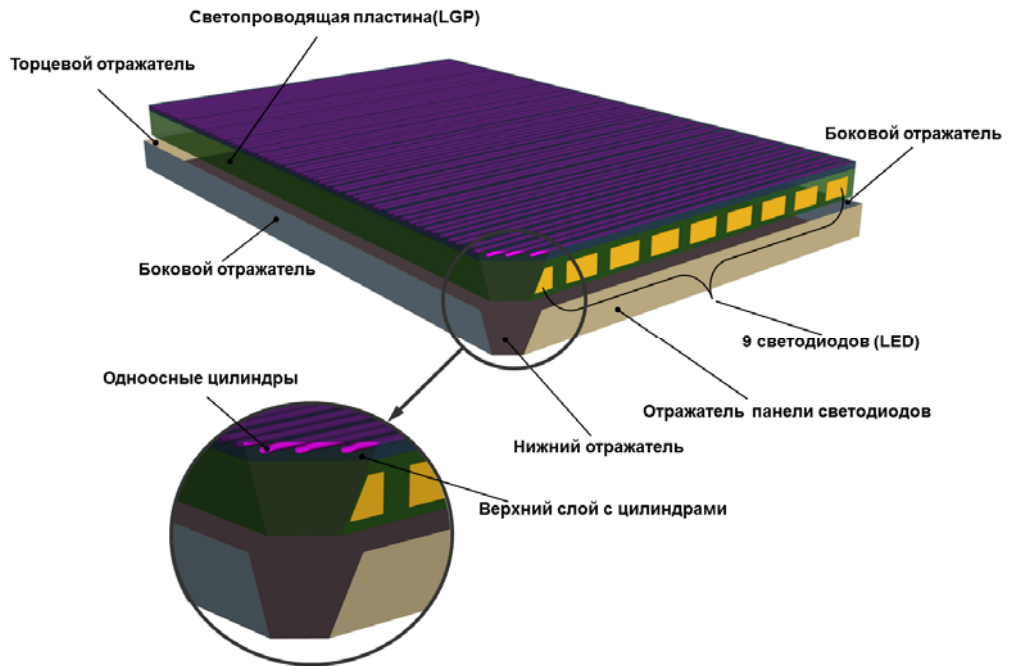


Рис. 1. Общий вид устройства. Нижний отражатель, боковые отражатели, отражатель на панели светодиодов и на противоположной стороне немного сдвинуты для наглядности.

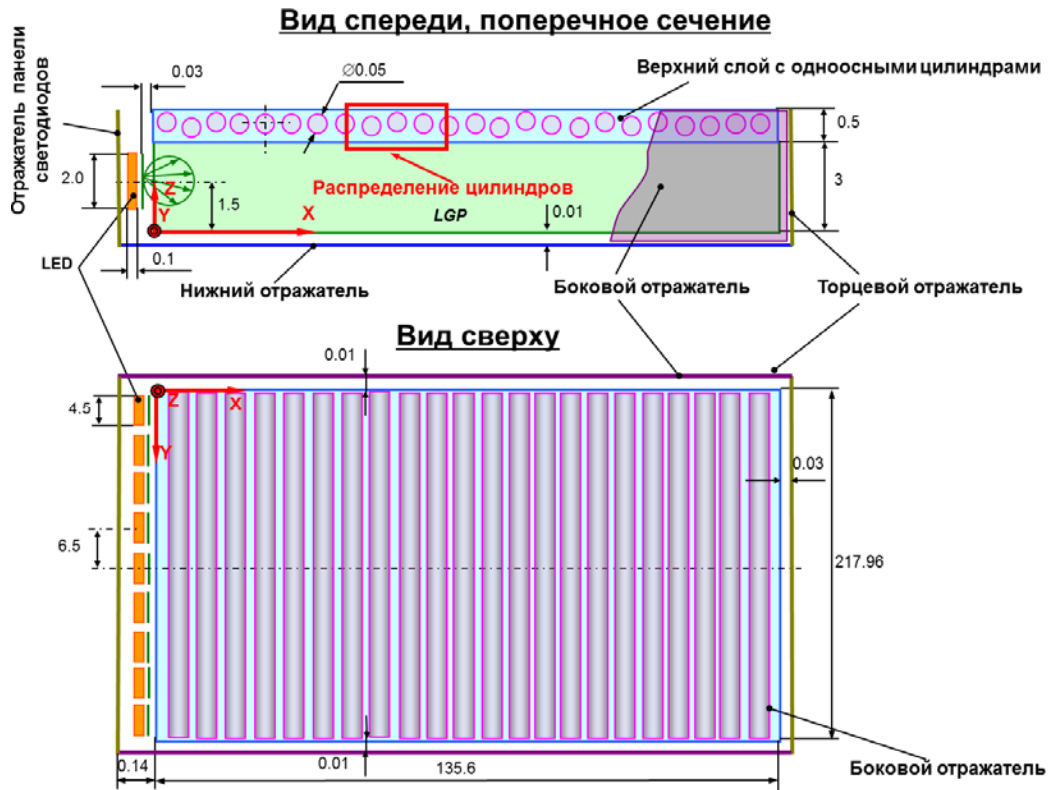


Рис. 2. Схема моделируемого устройства. Размеры даны в миллиметрах, масштаб некоторых элементов может быть искажен для большей наглядности. Верхний слой находится в оптическом контакте с LGP.

## 6.2 Результаты моделирования

Свет, излучаемый устройством, практически полностью линейно поляризован. Это происходит из-за того, что только необыкновенная компонента света рассеивается и поэтому может выйти из устройства. В то время как обыкновенная компонента не рассеивается на цилиндрах и поэтому остается внутри LGP.

Результаты моделирования показаны на рис. 3.

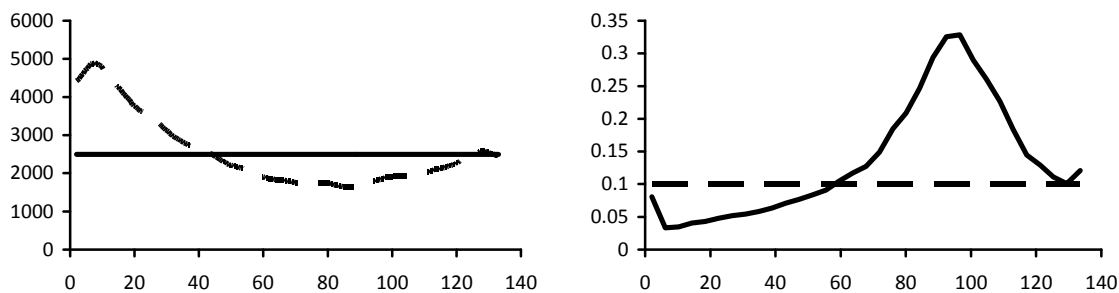


Рис. 3. Начальное (пунктир) и достигнутое оптимизацией (сплошная) распределение вдоль оси прибора. Левый график — светимость в люксах, правый — относительная концентрация цилиндров; горизонтальная координата — расстояние от торца с LED, мм.

Пространственное распределение излучения для начального распределения анизотропных цилиндров было существенно неоднородным. После нескольких шагов оптимизации была найдена плотность распределения цилиндров, которая соответствовала почти однородному распределению излучения.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье описано вычисление рассеяния светового луча на границе между двумя одноосными или на границе между одноосной и изотропной средами. Подробно описан процесс вычисления направления рассеянных лучей и параметров вектора Стокса для уходящих лучей. Разработанный алгоритм основан на хорошо известных физических и математических принципах. Мы считаем, что он практичнее и удобнее, чем подходы, изложенные в других публикациях. Кроме этого, наш подход является более общим, чем упомянутые выше, поскольку он позволяет оперировать с лучами, имеющими “смешанную” поляризацию, которые не являются чисто обыкновенными или чисто необыкновенными. Такая суперпозиция обыкновенного и необыкновенного лучей существует в реальности и должна быть учтена в аккуратных расчетах.

Описанный алгоритм был реализован и интегрирован с программный комплекс моделирования распространения света, основанный на прямой Монте-Карло трассировке лучей. Данное расширение программного комплекса позволило успешно смоделировать устройство жидкокристаллического дисплея, рабочими элементами которого являются цилиндры из одноосного материала.

## 8. ПРИЛОЖЕНИЕ. АМПЛИТУДЫ УХОДЯЩИХ ВОЛН

Как было сказано выше, в общем случае каждая падающая волна порождает четыре уходящих волны:

- a) обыкновенную отраженную
- b) необыкновенную отраженную
- c) обыкновенную преломленную
- d) необыкновенную преломленную

Для каждой из них достаточно найти только электрическое поле  $E$ , используя которое, может быть вычислено магнитное поле.

### 8.1 Направление поля

Направление электрического поля (единичный действительный вектор) есть

$$e = \begin{cases} \frac{[\mathbf{a} \times \mathbf{s}]}{|\mathbf{a} \times \mathbf{s}|} & \text{обыкновенный} \\ \frac{[[\mathbf{a} \times \mathbf{s}] \times \mathbf{s}]}{[[\mathbf{a} \times \mathbf{s}] \times \mathbf{s}]} = \frac{\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}}{|\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{s})\mathbf{s}|} & \text{необыкновенный} \end{cases}$$

Заметим, что эти направления для обыкновенной и необыкновенной волн, относящимся к одному и тому же лучу, взаимно перпендикулярны. Направление магнитного поля есть

$$\mathbf{h} = \frac{[\mathbf{k} \times \mathbf{e}]}{|\mathbf{k} \times \mathbf{e}|}$$

для обеих обыкновенной и необыкновенной волн.

Направление поля для затухающей волны необходимо для вычисления френелевских коэффициентов, поскольку поле этой волны входит в граничные условия наравне с полями распространяющихся волн.

Однако, для таких волн вышеприведенные уравнения неприменимы хотя бы потому, что нет переноса энергии и, соответственно, для этих волн направлений луча не существует. Вместо этого можно использовать уравнение<sup>8</sup>:

$$k^2 E_i - k_i \sum_j k_j E_j = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sum_j \varepsilon_{i,j} E_j$$

где  $k^2 \equiv \sum_i k_i^2$ ; величины  $k_i$  и тензор диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  известны. Таким образом,  $E$  есть собственный вектор известной матрицы.

### 8.2 Амплитуды электрического поля

Остается только вычислить четыре комплексных амплитуды электрического поля для четырех рассеянных следующих волн. Они определяются из четырех граничных условий, которые соответствуют непрерывности касательных компонент полей  $E$  и  $H$  через границу<sup>13</sup>.

Работа поддержана грантом РФФИ № 15-01-01147.

## REFERENCES

- [1] S. Guy, C. Soler, “Graphics Gems Revisited”, *ACM Transactions on Graphics: Proc. of the SIGGRAPH Conference*, **23** (3), 231–238 (2004).
- [2] S.C. McClain, L.W. Hillman, and R.A. Chipman, “Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. 1. algorithms”, *Journal of Optical Society of America*, **10**(11), 2371–2382 (1993).
- [3] S.C. McClain, L.W. Hillman, and R.A. Chipman, “Polarization ray tracing in anisotropic optically active media. 2. theory and physics”, *Journal of Optical Society of America*, **10**(11), 2383–2393 (1993).
- [4] A. Weidlich, A. Wilkie. “Realistic Rendering of Birefringency in Uniaxial Crystals”, *ACM Transactions on Graphics*, **27**(1), 6:1–6:12 (2008).
- [5] V.A. Debelov, D.S. Kozlov, “Lokal’naya model vzaimodeistviya sveta s izotropnymi i odnoosnymi prozrachnymi sredami”, *Vestnik NGU. Informacionnye tekhnologii*, **10**(1), 5–23 (2012). (in Russian)
- [6] D.D. Zhdanov, A.A. Garbul’, V.A. Maïorov, I.S. Potemin, V.G. Sokolov, “Indeterminate ray tracing in problems of the analysis of light scattering and the design of illuminating systems”, *Journal of Optical Technology*, **81** (6), 322-326 (2014).
- [7] M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Elsevier, (1980).
- [8] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Electrodinamika sploshnyh sred*, “Nauka”, Moscow, (1982). (in Russian)
- [9] F.I. Fyodorov. *Optika anizotropnyh sred*, Moscow, (2004). (in Russian)
- [10] D. Zhdanov, A. Garbul, V. Mayorov, V. Sokolov, I. Potemin, T. Hyodo, A. Voloboy, V. Galaktionov. Automatic Design of Illumination Systems // *Optical Review*, vol. 20, no. 2, p.155-159, 2013.
- [11] D. Zhdanov, V. Sokolov, A. Garbul, V. Mayorov, K. Tsuchiya, A. Voloboy, V. Galaktionov, “Simulation and Design of Light Illuminating Systems Based on LED”, *Conference proceedings of 8-th International Conference on Optics-photonics Design & Fabrication, St. Petersburg, July 2–5*, 91–92 (2012).
- [12] A.A. Garbul, D.D. Zhdanov, I.S. Potemin, V.G. Sokolov. “Modelirovanie i optimizaciya osvetitel’nyh system s rasseivayuschimi microstructurami na krivoi poverhnosti”, *Proceedings of XI International Conference “Applied Optics-2014”*, **2**, 106–110 (2014). (in Russian)
- [13] S. Ershov, A. Garbul, S. Pozdnyakov, V. Sokolov, A. Voloboy, “Ray Tracing in Presence of Birefringent Media”, *Proceedings of 26-th International Conference on Computer Graphics and Vision, September 19-23, Nizhny Novgorod*, 221-226 (2016).

Received February 12, 2017.