

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_1 СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ-ЗЕМЛЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ПРОЕКТЕ “СОДА”

Г.К. БОРОВИН^{*}, И.С. ИЛЬИН[†], А.Г. ТУЧИН[†]

^{*} Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН Москва, Россия
Email: borovin@keldysh.ru, web page: http://keldysh.ru/Dir_board/directors-fr.html

[†] Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН Москва, Россия
Email: is.ilin@physics.msu.ru Web page: <http://www.kiam1.rssi.ru/~ivan>

Ключевые слова: квазипериодические орбиты, коллинеарные точки либрации, L_1 , астероидная опасность, СОДА.

Аннотация. Российский проект «СОДА» - Система обнаружения дневных астероидов – предполагает создание космической обсерватории, позволяющей детектировать опасные сближения комет и астероидов с Землёй. Использование квазипериодической орбиты в окрестности точки L_1 , удалённой от Земли на расстояние около 1,5 млн. км, для размещения космической обсерватории позволяет ориентировать телескоп в направлении Солнце-Земля, что даёт возможность непрерывно наблюдать астероиды, приближающиеся к Земле со стороны Солнца.

В работе рассмотрена методика баллистического проектирования квазипериодических орбит в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля, а также построение одноимпульсных траекторий перелёта на данные орбиты с низкой околоземной орбиты. Данный метод позволяет формировать в окрестности либрационной точки квазипериодические орбиты заданной геометрии, требующие минимальных энергетических затрат на коррекции поддержания орбиты. Построение траекторий было выполнено в рамках используемой в Баллистическом центре ИПМ численно-эфемеридной модели Солнечной системы. Описанная методика была использована для построения рабочих орбит КА «Спектр-РГ» и «Миллиметрон» в окрестности либрационной точки L_2 системы Солнце-Земля.

QUASI PERIODIC ORBITS IN THE VICINITY OF THE SUN-EARTH L_1 POINT AND THEIR IMPLEMENTATION IN “SODA” MISSION

G.K. BOROVIN^{*}, I.S. ILIN[†], A.G. TUCHIN[†]

^{*} Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Miusskaya sq, 4, Moscow, Russia.
Email: borovin@keldysh.ru, web page: http://keldysh.ru/Dir_board/directors-fr.html

[†] Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Miusskaya sq, 4, Moscow, Russia
Email: is.ilin@physics.msu.ru Web page: <http://www.kiam1.rssi.ru/~ivan>

Key words: quasiperiodic orbits, collinear libration point, L_1 , asteroid hazard, SODA.

2010 Mathematics Subject Classification: 37N05, 70F07, 70F15.

Key words and Phrases: collinear libration points, halo orbits, quasi periodic orbits, SODA.

Summary. Russian project “SODA” – system of day asteroids detection - is governed by Institute of Astronomy, Russian Academy of Sciences. A space telescope should be placed in a quasiperiodic orbit around L_1 point on the Sun-Earth system. The purpose of the project is to perform tracking of celestial bodies, mainly comets and asteroids, approaching Earth in order to prognose asteroid hazard. Project is on early stage now, mission implementation is scheduled for the 2020s. The usage of quasiperiodic orbit at the 1,5 mln km distance from the Earth allows to preserve space telescope orientation in Sun-Earth direction pointing towards our planet wich provides conditions for continous tracking of potentially hazardous objects approaching Earth from Sun side.

This work covers quasiperiodic orbits’ ballistic design for the Sun-Earth system L_1 libration point and one-impulse transfer trajectories construction issues. The method described provides quasiperiodic orbits with prescribed geometry around Sun-Earth L_1 point with low-cost stationkeeping strategy. The problem is considered in the full ephemeris model of Solar system developed at the Ballistic center of Keldysh Institute. The methods described have been successfully used for construction of the nominal orbits for the “Spectr-RG” and “Millimetron” missions presupposing deployment of space telescopes in the vicinity of the Sun-Earth L_2 point.

1 ВВЕДЕНИЕ

В работе рассмотрен вопрос построения квазипериодических орбит различных типов в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце-Земля. Актуальность данного исследования обусловлена планами Федерального космического агентства по развертыванию системы предупреждения астероидной опасности, предполагающей размещение внеатмосферных телескопов для детектирования околоземных космических объектов и прогнозирования их опасных сближений с Землёй. Один из проектов, реализующих данную концепцию – Система обнаружения дневных астероидов (СОДА) – предполагает размещение внеатмосферного телескопа с солнечной стороны на удалении порядка 1-2 млн. км от Земли. Использование квазипериодической орбиты в окрестности либрационной точки L_1 системы Солнце-Земля для размещения космического телескопа позволяет сохранять постоянную пространственную конфигурацию объектов Солнце – космический аппарат (КА) – Земля, обеспечивая постоянные условия для наблюдения околоземного пространства.

Данная публикация является продолжением цикла работ¹⁻⁷, исследующих ограниченные орбиты в окрестности коллинеарных точек либрации системы Солнце-Земля. Рассмотрение процесса формирования квазипериодических орбит начинается математического определения точки L_1 в системе Солнце-Земля. Третий раздел посвящен рассмотрению квазипериодических орбит в их окрестности коллинеарных точек либрации в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел. Четвертый раздел статьи рассматривает основные принципы методики формирования начального приближения для траектории перелёта на квазипериодические орбиты в окрестности точки L_1 в рамках ограниченной круговой задачи трёх тел, подробно описанной в работах¹⁻³. Пятый раздел содержит описание методики расчёта коррекций поддержания квазипериодических орбит в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы, а также результаты расчётов - квазипериодические траектории.

2 КОЛЛИНЕАРНАЯ ТОЧКА ЛИБРАЦИИ L_1 КАК ЧАСТНОЕ РЕШЕНИЕ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ

Рассмотрим движение трёх материальных точек с массами m_1 , m_2 и m , притягивающихся по закону Ньютона. Сами точки также будем обозначать буквами m_1 , m_2 и m . Полагаем, что $m_1 > m_2 \gg m$. Движение точек m_1 и m_2 считаем круговым. Радиусы-векторы точек m_1 , m_2 и m в некоторой инерциальной системе отсчета обозначим \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r} . Уравнения движения точек имеют вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = -\frac{\gamma m_2 (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\gamma m_1 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\gamma m_2 (\mathbf{r} - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_2|^3} \quad (1)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t , γ – постоянная тяготения. Положим $\mathbf{R} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{c} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_2$. Вычитая первое уравнение системы (1) из её второго уравнения, получим уравнение относительно \mathbf{R} :

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\frac{\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (2)$$

Вычтем второе уравнение (1) из последнего уравнения этой системы. Будем иметь

$$\ddot{\mathbf{c}} = -\frac{\gamma m_2 \mathbf{c}}{|\mathbf{c}|^3} + \gamma m_1 \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \mathbf{c}}{|\mathbf{R} + \mathbf{c}|^3} \right), \quad (3)$$

Возьмём произвольное решение $\mathbf{R}(t)$ уравнения (2), не обязательно описывающее круговые орбиты точек m_1 и m_2 . Будем искать частное решение уравнения (3) в виде $\mathbf{c} = x\mathbf{R}(t)$, где $x = \text{const}$. Подставим выписанное выражение для \mathbf{c} в уравнение (3) и учтем, что $\ddot{\mathbf{c}} = x\ddot{\mathbf{R}}(t) = -\gamma(m_1 + m_2)\mathbf{R}(t)|\mathbf{R}(t)|^{-3}$. После несложных преобразований получим уравнение, определяющее значения x :

$$-(m_1 + m_2)x = -\frac{m_2}{x^2} + \frac{m_1 x(2+x)}{(1+x)^2}, \quad (4)$$

Введем параметр $\mu = m_2(m_1 + m_2)^{-1}$, тогда уравнение (4) примет следующий вид:

$$x - \frac{\mu}{x^2} - \frac{x(x+2)(\mu-1)}{(1+x)^2} = 0, \quad (5)$$

Выписанное уравнение приводится к алгебраическому уравнению пятой степени, которое всегда имеет три действительных корня¹⁰. Частные решения уравнения (3), отвечающие этим корням, называются коллинеарными точками либрации. Ниже рассматривается корень из интервала $(-1, 0)$, задающий точку либрации, традиционно

обозначаемую L_1 . Они лежат в интервалах $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$ и $(0, +\infty)$. Точке либрации L_1 отвечает корень уравнения

$$x^5 - (3 - \mu)x^4 + (3 - 2\mu)x^3 - \mu x^2 + 2\mu x - \mu = 0, \quad (6)$$

Исследование проводится для точек m_1 и m_2 , служащих моделью системы Солнце – Земля. При этом под m_2 и \mathbf{r}_2 понимаются масса и радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна, решение уравнения (2) – круговая орбита, $R = |\mathbf{R}| = \text{const}$, $R \approx 1.496 \cdot 10^{11}$ м,

$$n_0 = \sqrt{\frac{\gamma(m_1 + m_2)}{R^3}} \approx 1.991 \cdot 10^{-7}, \text{ с.}$$

Система Солнце – Земля характеризуется значением $\mu = 3.040424 \cdot 10^{-6}$. Корень уравнения (6), отвечающий точке либрации L_1 , обозначим x_0 , $x_0 = -0.01001097789$ для рассматриваемой системы.

3 КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_1 В РАМКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ

Для исследования движения точки m в окрестности точки либрации L_1 уравнение (3) запишем в скалярной форме в декартовой системе координат, которую обозначим m_2xyz . Начало этой системы находится в точке m_2 , орты ее базиса $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ определены соотношениями

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{R}}{R}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}}{|\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}. \quad (7)$$

Как нетрудно видеть,

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = n_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -n_0 \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \text{const}, \quad (8)$$

где n_0 - среднее движение.

Ниже в данном пункте компоненты векторов и координаты точек указываются в системе m_2xyz . В частности, $L_1 = (x_0 R, 0, 0)$.

Положим $\mathbf{c} / R = (x, y, z)$ и введем безразмерное время $\tau = n_0 t$, дифференцирование по которому будем обозначать штрихом. Тогда уравнения (3) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
 x'' - 2y' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x &= (1-\mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right), \\
 y'' + 2x' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y &= 0, \\
 z'' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z &= 0, \\
 r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}
 \end{aligned} \tag{9}$$

Точке либрации L_1 отвечает положение равновесия (стационарное решение) системы (9) $x = x_0, y = z = 0$. Малые колебания точки m в окрестности точки L_1 описываются линеаризованными уравнениями

$$\begin{aligned}
 \Delta x'' - 2y' - (2a+1)\Delta x &= 0 \\
 y'' + 2\Delta x' + (a-1)y &= 0 \\
 z'' + az &= 0 \\
 \text{где } \Delta x = x - x_0, \\
 a = \frac{\mu}{x_0^3} + \frac{1-\mu}{(1+x_0)^3}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Общее решение линеаризованных уравнений имеет вид¹⁰

$$\begin{aligned}
 \Delta x &= c_1 e^{\lambda\tau} + c_2 e^{-\lambda\tau} + c_3 \cos \omega\tau + c_4 \sin \omega\tau \\
 y &= k_1 (c_1 e^{\lambda\tau} - c_2 e^{-\lambda\tau}) + k_2 (c_3 \sin \omega\tau - c_4 \cos \omega\tau) \\
 z &= c_5 \cos \sqrt{a}\tau + c_6 \sin \sqrt{a}\tau
 \end{aligned} \tag{11}$$

Здесь c_1, \dots, c_6 – произвольные постоянные интегрирования,

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a + a - 2}}{2}}, \\
 \omega &= \sqrt{\frac{\sqrt{9a^2 - 8a - a + 2}}{2}}, \\
 k_1 &= \frac{\lambda^2 - 2a - 1}{2\lambda} = -\frac{2\lambda}{\lambda^2 + a - 1}, \\
 k_2 &= -\frac{2\omega}{\omega^2 - a + 1} = -\frac{\omega^2 + 2a + 1}{2\omega}.
 \end{aligned}$$

Для упрощения дальнейшего изложения выполним переход к более удобным переменным интегрирования, воспользовавшись следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{c_3^2 + c_4^2}, & B &= \sqrt{c_5^2 + c_6^2}, & C &= c_1, & D &= c_2, \\
\cos(\varphi_1) &= \frac{c_3}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, & \sin(\varphi_1) &= -\frac{c_4}{\sqrt{c_3^2 + c_4^2}}, \\
\cos(\varphi_2) &= \frac{c_5}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}, & \sin(\varphi_2) &= -\frac{c_6}{\sqrt{c_5^2 + c_6^2}}.
\end{aligned}$$

Тогда решение системы линеаризованных дифференциальных уравнений, описывающих движение в малой окрестности точки L_1 во вращающейся системе координат с осью X , направленной на Солнце, записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= -A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + Ce^{\lambda t} + De^{-\lambda t} \\
\xi_2 &= k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (Ce^{\lambda t} - De^{-\lambda t}) \\
\xi_3 &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

Такая запись позволяет выделить в явном виде периодические колебания в плоскости XY - амплитуда задаётся коэффициентом A , частота - ω_1 , фаза - φ_1 , и колебания в ортогональной плоскости с частотой ω_2 , фазой φ_2 и коэффициентом B , определяющим амплитуду. Коэффициенты C и D соответствуют экспоненциальному уходу от периодического решения в положительном и отрицательном времени.

Поскольку собственные значения матрицы системы линеаризованных уравнений движения ограниченной круговой задачи трёх тел в трёх коллинеарных точках либрации принимают значения $\{\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \pm \lambda\}$, $\omega_1, \omega_2, \lambda > 0$, $i = \sqrt{-1}$, согласно теории устойчивости Ляпунова в линейном приближении это особые точки типа центр \times центр \times седло. Так как система дифференциальных уравнений движения автономна, обладает первым интегралом и стационарным решением, к ней можно применить теорему Ляпунова о существовании периодических решений, называемых обычно его именем¹¹. Согласно теореме Ляпунова, благодаря наличию части центр \times центр, в случае выполнения условия $\frac{\omega_2}{\omega_1} \neq k$, где k целое число, каждая коллинеарная

равновесная точка производит два однопараметрических семейства периодических орбит, известных как семейства плоских или вертикальных периодических орбит Ляпунова. Семейство плоских орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_1$ и близко решениям линеаризованных уравнений движения при $B = C = D = 0$. В решениях этого семейства $z \equiv 0$ - материальная точка не покидает плоскости XY . Семейство вертикальных орбит имеет период $T \approx 2\pi / \omega_2$ и близко решениям системы (3) при $A = C = D = 0$.

При возрастании энергии (амплитуд колебаний) линейная устойчивость орбит меняется, и, наряду с семействами периодических орбит Ляпунова, возникают бифуркационные орбиты, среди которых появляются другие семейства периодических орбит. Первое семейство, отделяющееся от семейства плоских орбит Ляпунова, относится к трёхмерным периодическим орбитам, симметричным относительно

плоскости $y = 0$ – это так называемые гало-орбиты. Периодичность гало-орбит обусловлена совпадением частот колебаний в плоскости XU и по оси OZ – $\omega_1 = \omega_2$. Порождаются два семейства гало-орбит, северное и южное.

Если отношение частот колебаний в различных плоскостях является иррациональным числом, движение принимает квазипериодический характер – период замыкания траектории стремится к бесконечности. В случае близости частот и амплитуд колебаний пространственному периодическому решению – гало-орбите – квазипериодическая траектория лежит в окрестности периодической гало-орбиты на поверхности двумерного тора. Такие траектории будем называть квази гало-орбитами, проектирование именно этого класса орбит рассматривается в работе. Если же частоты различаются существенным образом, траектория движения называется орбитой Лиссажу.

4 ФОРМИРОВАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЁТА НА КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_1 В РАМКАХ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ

Поиск одноимпульсных траекторий перелёта с низкой околоземной орбиты выведения на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации L_1 системы Солнце-Земля выполняется на инвариантных многообразиях коллинеарной точки либрации с помощью варианта метода продолжения по параметру, предложенного М.Л. Лидовым и развитого в работах¹⁻³ применительно к либрационной точке L_2 . Основная идея метода заключается в продолжении траектории из некоторой точки квазипериодической орбиты в обратном направлении по времени до момента пересечения с орбитой выведения. Заданная таким образом траектория принадлежит инвариантному многообразию, связывающему элементы центрального многообразия (периодические и квазипериодические орбиты в окрестности коллинеарной точки либрации) с областью околоземного пространства¹³. Вариацией точки старта с квазипериодической орбиты можно добиться пересечения траекторией орбиты выведения заданного радиуса. Таким образом, метод изолиний позволяет установить функциональную связь между параметрами квазипериодической орбиты и параметрами отлетной от Земли траектории.

Остановимся на некоторых отличиях выражений для формирования орбиты в окрестности точки L_1 .

Движение КА рассматривается во вращающихся системах координат (СК): в системе $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре Земли O и в системе $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ с началом O' в точке либрации L_1 (рис. 2). При этом: $x_1 = \xi_1 + |OO'|$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$. Зависимость координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 от времени определяется решением линеаризованной в окрестности точки L_1 системы уравнений движения (12).

Рассмотрим переход между системами координат $O'\xi_1\xi_2\xi_3$ и $Ox_1x_2x_3$. Если траектория начинается в окрестности Земли и является асимптотической к условно-периодической орбите, расположенной в достаточно малой окрестности L_1 , то такая траектория обязательно пересечёт плоскость $x_1 = x_1^*$, где

$x_1^* = r_L \cdot \theta$, $\theta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right]$ r_L – расстояние до точки либрации L_1 , $r_L = |x_0 \cdot \mathbf{R}|$. При этом в

главном приближении характеристики траектории для $|x_1| < |x_1^*|$ в СК $Ox_1x_2x_3$ должны удовлетворительно описываться решениями задачи двух тел, а при $|x_1| > |x_1^*|$ линейным приближением (12).

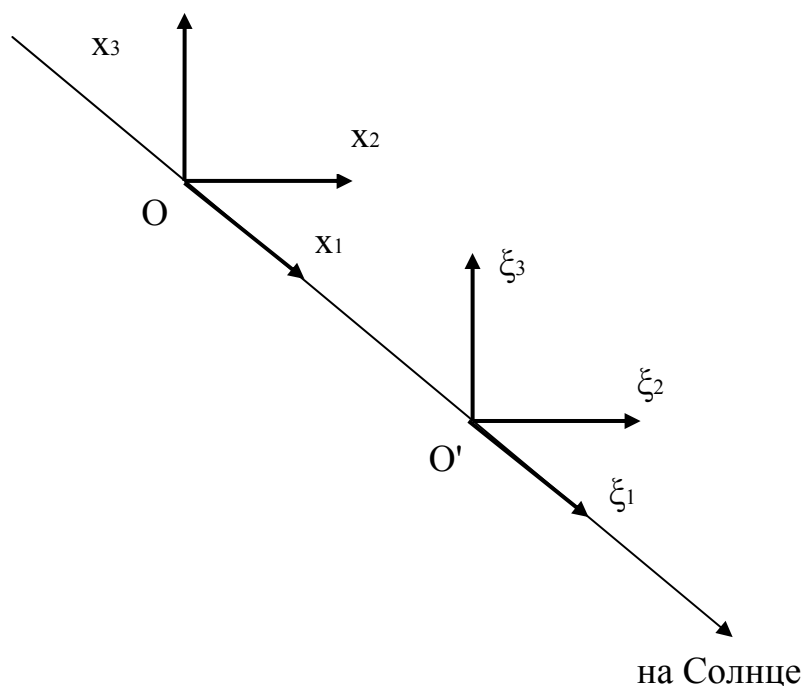


Рис. 1. Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $O'\xi_1\xi_2\xi_3$

Асимптотичность траектории (асимптотическое приближение к условно-периодической орбите) в рамках такого приближения определяется условием $C = 0$.

Рассмотрим алгоритм вычисления r_π по заданным фазам φ_1 и φ_2 . Для этого будем рассматривать его как функцию параметров квазипериодической орбиты, т.е. $r_\pi = f(\varphi_1, \varphi_2, \theta_A, \theta_B)$ ($\theta_A = \frac{A}{r_L}$, $\theta_B = \frac{B}{r_L}$, $\theta_C = \frac{C}{r_L}$). Сначала вычисляются значения параметров системы Солнце-Земля и констант $\mu', n_1, r_L, r_L, \omega_1, \omega_2, \lambda, k_1, k_2, a$. Затем вычисляется вектор состояния КА в инерциальной СК, полученной фиксацией осей вращающейся СК на фиксированный момент времени t в зависимости от параметров: A, B, φ_1 и φ_2 .

Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3$$

вектор состояния КА в момент времени $t = 0$ во вращающейся СК с центром в L_1 ,

$$x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2,$$

компоненты векторов положения и скорости КА в момент времени $t = 0$ в невращающейся геоцентрической эллиптической СК $Ox_1x_2x_3$, ось Ox_1 которой направлена на Солнце в момент времени t_0 ,

$$x_1^* = \theta \cdot r_L \quad \text{параметр перехода из сферы действия Земли в окрестность}$$

$$L_1, \theta \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4} \right].$$

Пусть начало отсчета выбрано так, что при $t = t_0$ выполняется равенство: $x_1 = x_1^*$. Седловая компонента линейного приближения обеспечивает возможность перехода с орбиты искусственного спутника Земли на квазипериодическую орбиту без импульса торможения. Значение параметра D выбирается таким образом, что при $t = t_0$ траектория движения аппарата пересекает границу сферы действия Земли:

$$D = A \cos \varphi_1 - r_L (1 - \theta)$$

Следует отметить, что в выбранной системе координат $D < 0$, т.к. определяет уход по направлению от Солнца, коэффициент $C > 0$, т.к. отвечает движению к Солнцу, а коэффициенты A и B имеют положительные значения.

Компоненты векторов положения и скорости КА вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= r_L (1 - \theta) & \dot{\xi}_1 &= \omega_1 A \sin \varphi_1 - \lambda D \\ \xi_2 &= k_2 A \sin \varphi_1 - k_1 D, & \dot{\xi}_2 &= k_2 \omega_1 A \cos \varphi_1 + k_1 \lambda D \\ \xi_3 &= B \cos \varphi_2 & \dot{\xi}_3 &= -\omega_2 B \sin \varphi_2 \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 + r_L & \dot{x}_1 &= \dot{\xi}_1 - n_1 x_2 \\ x_2 &= \xi_2 & \dot{x}_2 &= \dot{\xi}_2 + n_1 x_1 \\ x_3 &= \xi_3 & \dot{x}_3 &= \dot{\xi}_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Далее по вектору $(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3)$ вычисляются параметры траектории перелёта с орбиты выведения на квазипериодическую орбиту как элементы геоцентрической высокоэллиптической орбиты КА, в том числе рассчитывается расстояние перицентра r_π . Таким образом, устанавливается связь между параметрами квазипериодической орбиты в окрестности точки либрации L_1 и параметрами геоцентрической отлётной траектории, что составляет суть метода изолиний. Затем с помощью итерационной процедуры, использующей метод бисекции, коррекцией значения фаз φ_1, φ_2 значение r_π приводится к заданной высоте орбиты выведения.

На рис. 2 представлены изолинии, использованные для расчёта множеств квазипериодических орбит в окрестности точки L_1 . Соотношение амплитуд колебаний θ_A и θ_B для получения квази гало-орбит было подобрано таким образом, чтобы сформировать два класса квазипериодических орбит – орбиты Лиссажу (красный цвет) и квази гало-орбиты большой амплитуды (синий цвет) - $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.850$. Высота перицентра низкой околоземной орбиты принята равной 300 км, значения фаз φ_1, φ_2 на графике приведены в радианах.

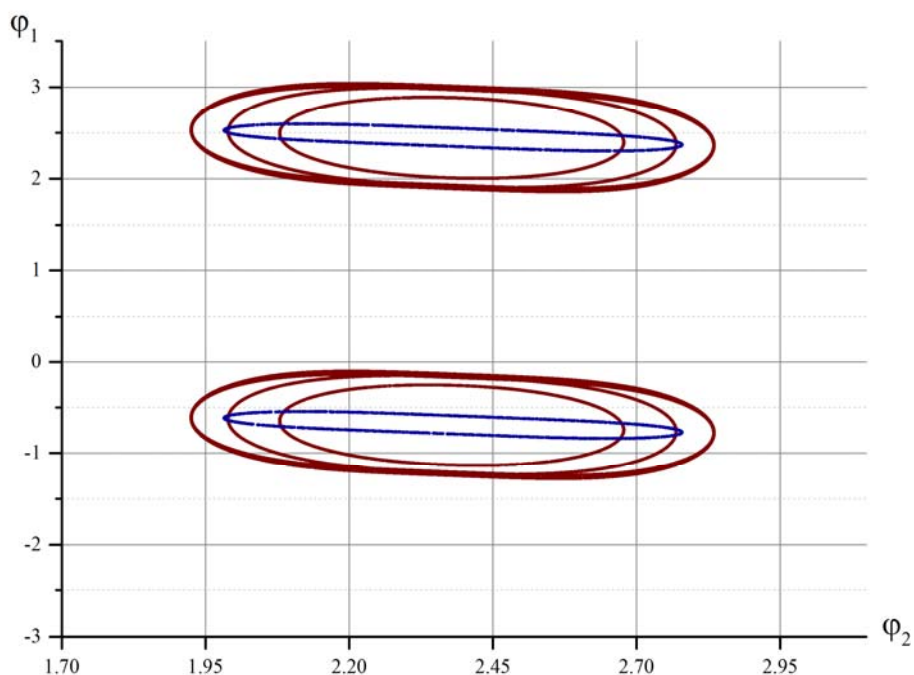


Рис. 2. Изолинии, рассчитанные для перелёта в окрестность точки L_1 ,
 $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.1552$; $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.16$; $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.17$;
 $\theta_A = 0.18, \theta_B = 0.16$; $\theta_A = 0.19, \theta_B = 0.16$; $\theta_A = 0.20, \theta_B = 0.85$

5 КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ L_1 СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ-ЗЕМЛЯ, РАССЧИТАННЫЕ В РАМКАХ ЧИСЛЕННО-ЭФЕМЕРИДНОЙ МОДЕЛИ СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ

Алгоритм баллистического проектирования траекторий перелёта на заданную квазипериодическую орбиту в рамках численно-эфемеридной модели Солнечной системы подробно рассмотрен в работах¹⁻³. Расчёт траекторий перелёта с низкой околокруговой орбиты на квазипериодические орбиты выполняется в рамках модели движения КА, учитывающей гравитационное воздействие Земли, Солнца, Луны и планет Солнечной системы, неравномерность вращения Земли, силы давления солнечной радиации, влияние атмосферы Земли. Для учёта нецентральной гравитационного поля Земли применяется модель гравитационного потенциала Земли ПЗ90-2 размерности 36x36. При расчёте перелётов с использованием гравитационных манёвров применяется модель гравитационного поля Луны JGL075D1 размерности 75x75. Учёт неравномерности вращения Земли обеспечивается моделью IAU2000A, рекомендованной Международным астрономическим союзом. На участке отлёта от Земли используется модель верхней атмосферы Земли ГОСТ Р 25645.166-2004.

Для определения положения Солнца и планет Солнечной системы используется астрономический ежегодник DE421, разработанный в JPL NASA. В качестве основной рабочей системы координат выбрана инерциальная геоцентрическая прямоугольная система координат (СК) J2000, также используются селенографическая прямоугольная вращающаяся СК и геоцентрическая прямоугольная гринвичская СК ПЗ90-2. Моделирование работы двигателей КА не производится, задача решается в импульсной постановке. Численное интегрирование уравнений движения КА для построения

траектории выполняется методом Дормана-Принса. Наклонение орбиты выведения полагается равным 51.6° относительно плоскости Земного экватора (что соответствует широте космодрома Байконур).

Квазипериодические орбиты являются неустойчивыми, так как наследуют гиперболическую неустойчивость коллинеарной либрационной точки, их порождающей. Кроме того, рассмотрение движения КА в численно-эфемеридной модели приводит к необходимости парирования дополнительных возмущений, вызванных отличием ограниченной круговой задачи трёх тел, для которой построено квазипериодическое приближение, от современной численной модели Солнечной системы. Для поддержания квазипериодических орбит в окрестности коллинеарных точек либрации требуется периодическое проведение манёвров коррекций траектории КА. Задачу расчёта коррекций можно рассматривать как оптимизационную задачу с двумя оптимизируемыми параметрами, в качестве которых выступают отклонения траектории КА от номинальной орбиты и суммарные затраты характеристической скорости на поддержание орбиты (сумма импульсов коррекций), а ограничением выступает минимальный интервал между коррекциями, обусловленный необходимостью проведения траекторных измерений для определения орбиты КА. Могут быть введены и другие ограничения – например, ограничения на направления векторов импульсов коррекций, связанные с конструктивными особенностями аппарата. В данной работе подобные дополнительные ограничения не рассматривались.

Существует две основные стратегии поддержания квазипериодических орбит с помощью корректирующих манёвров. Первая – удержание траектории в некоторой окрестности номинального решения – данная стратегия была применена в ходе полёта КА “ISEE-3”. Вторая стратегия – удержание КА на центральном многообразии ограниченной круговой задачи трёх тел, содержащем периодические и квазипериодические орбиты – впервые была применена в ходе полёта КА “SOHO”. Данная стратегия ставит своей главной целью минимизацию неустойчивой компоненты решения системы линеаризованных уравнений движения, приводящей к экспоненциальному уходу из окрестности точки либрации. Вторая стратегия позволяет обеспечить поддержание периодической или квазипериодической орбиты существенно меньшей суммой корректирующих импульсов. Все последующие миссии к коллинеарным точкам либрации использовали различные методики расчёта манёвров коррекций, реализующие варианты этой стратегии удержания КА на орбите в окрестности точки либрации.

Однако минимизация неустойчивой компоненты решения, полученного в рамках ограниченной задачи трёх тел, является необходимым, но не достаточным условием поддержания квазипериодической орбиты – необходимо также парировать возмущения, вызванные гравитационным воздействием планет Солнечной системы и избегать нежелательной долгосрочной эволюции орбиты.

Метод расчёта коррекций поддержания квазипериодической орбиты, использованный в данной работе, реализует стратегию удержания траектории КА на центральном многообразии динамической системы^{1,13}.

Коррекция рассчитывается с периодичностью 1 раз в 45 суток, расчёт траектории КА между манёврами коррекций поддержания квазипериодической орбиты выполняется численным интегрированием уравнений движения КА в эфемеридной модели Солнечной системы. Вектор импульса коррекции уточняется градиентным методом из

условия максимизации времени пребывания КА в заданной окрестности точки либрации L_1 после выполнения коррекции траектории:

$$F_{\Delta t}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -(t_{\text{out}L_1} - t_{\text{in}L_1})$$

Минимум функционала ищется градиентным методом с регулируемым шагом. Поправки к вектору скорости вычисляются по формуле:

$$\begin{pmatrix} \Delta V_x^{(i)} \\ \Delta V_y^{(i)} \\ \Delta V_z^{(i)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\Delta V_{\max}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial V_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial V_z}\right)^2}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial V_x} \\ \frac{\partial F}{\partial V_y} \\ \frac{\partial F}{\partial V_z} \end{pmatrix}$$

где ΔV_{\max} – максимально допустимое значение поправки, $F(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ - используемый функционал, k – номер шага цикла сокращения шага. На каждом шаге i итерационного процесса контролируется выполнение условия $(F)_i > (F)_{i+1}$. Если условие не выполняется, происходит переход к циклу сокращения поправок к вектору скорости до уровня, при котором выполняется условие: $(F)_i > (F)_{i+1}$. При достижении локального минимума выполняется переключение метода на покоординатный спуск. Итерационный процесс завершается при достижении локального максимума. На каждой итерации цикла расчёта поправки к вектору скорости происходит контроль её нормы, если $\|\Delta \vec{V}\| > \Delta V_{\max}$ и при этом $F > (F)_{\max}$, то происходит выход из цикла расчёта импульса коррекции.

Максимизация времени пребывания в окрестности точки L_1 позволила продолжить решение от найденного приближения для квазипериодической орбиты естественным образом – поддержание орбиты позволяет находиться в заданной окрестности точки либрации бесконечно долго – уход от квазипериодической траектории обусловлен только внешними возмущениями, учитываемыми численно-эфемеридной моделью. Минимальные корректирующие импульсы позволяют парировать внешние возмущения и поддерживать решение на выбранном семействе квазипериодических орбит с заданным уровнем энергии (амплитудами), контролируя время существования решения в заданной окрестности точки либрации. Отсутствие в функционале каких-либо параметров линейного решения позволяет сохранить движение в окрестности квазипериодической орбиты, в случае, если начальное приближение ей принадлежало. При использовании данного метода сумма импульсов, требуемых для поддержания выбранной квазипериодической орбиты в течение 7,5 лет в среднем составляют от 5 до 25 м/с без учёта ошибок исполнения манёвров коррекций орбиты.

Результатом работы алгоритма расчёта импульсов коррекций является построение траектории движения КА по квазипериодической орбите в течение заданного временного интервала в рамках описанной численно-эфемеридной модели Солнечной системы. После завершения расчета траектории КА выполняется расчет справочной

баллистической информации, актуальной при выборе рабочей орбиты КА из множества рассчитанных вариантов. В частности, рассчитываются зоны видимости КА с наземных станций слежения. Кроме того, производится оценка светотеневой обстановки на борту КА, и, при необходимости, выполняется точный расчёт, позволяющий вычислить время нахождения КА в тени Земли. В целом класс квази гало-орбит удовлетворяет условию постоянной освещенности КА Солнцем.

Рассмотрим примеры построенных квазипериодических орбит в окрестности точки L_1 . Был выполнен расчёт 96 траекторий со значениями параметров θ_A и θ_B , характеризующими геометрию орбиты Лиссажу, для диапазона дат старта с 01.01.2018 по 31.12.2018; а также расчёт 65 траекторий со значениями параметров $\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.85$, задающими геометрию квази гало-орбиты для диапазона дат старта с 01.01.2020 по 31.12.2020. Расчёт был выполнен с некоторым шагом по датам старта в пределах указанных диапазонов для уменьшения общего числа рассчитываемых траекторий. Представленные на рис. 9-18 графики соответствуют траекториям, рассчитанным для дат старта 01.05.2018 ($\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.1552$;) и 31.01.2020, ($\theta_A = 0.20$, $\theta_B = 0.85$), суммы импульсов коррекций поддержания траекторий за период 7,5 лет составляют 4.3 м/с и 22.2 м/с соответственно.

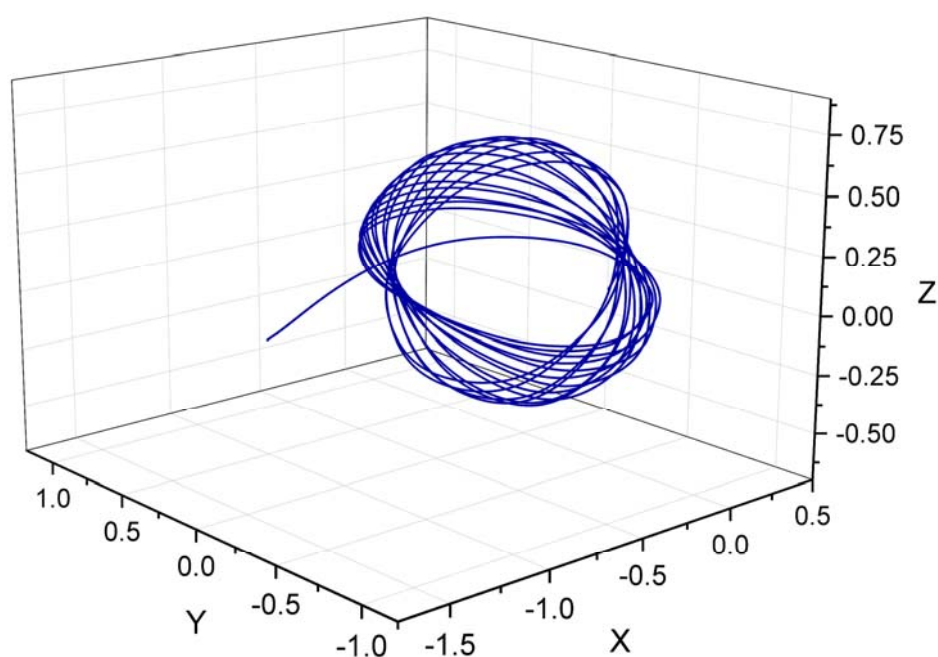


Рис. 3. Пространственная визуализация квазипериодической орбиты Лиссажу в СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

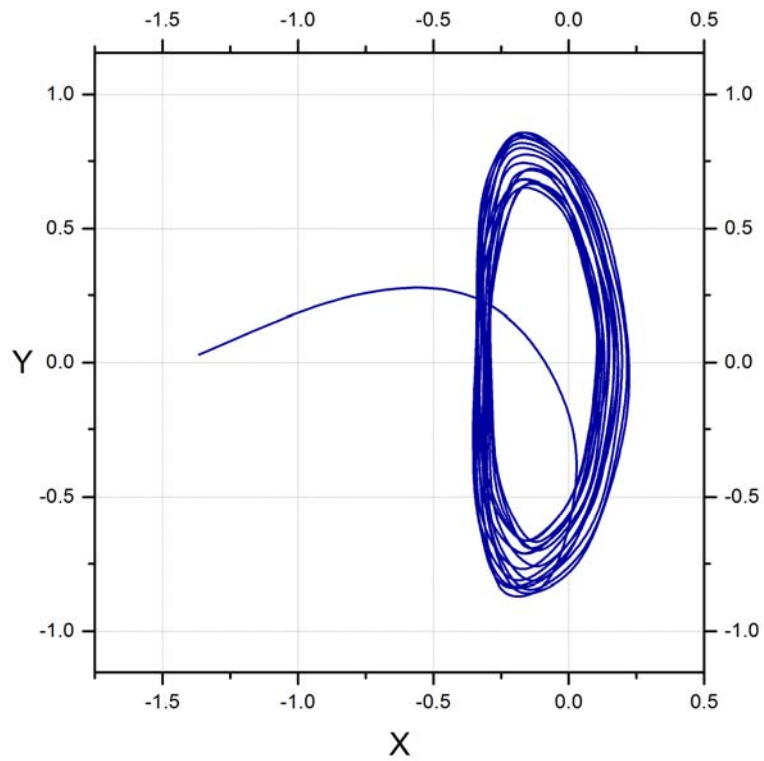


Рис. 4. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

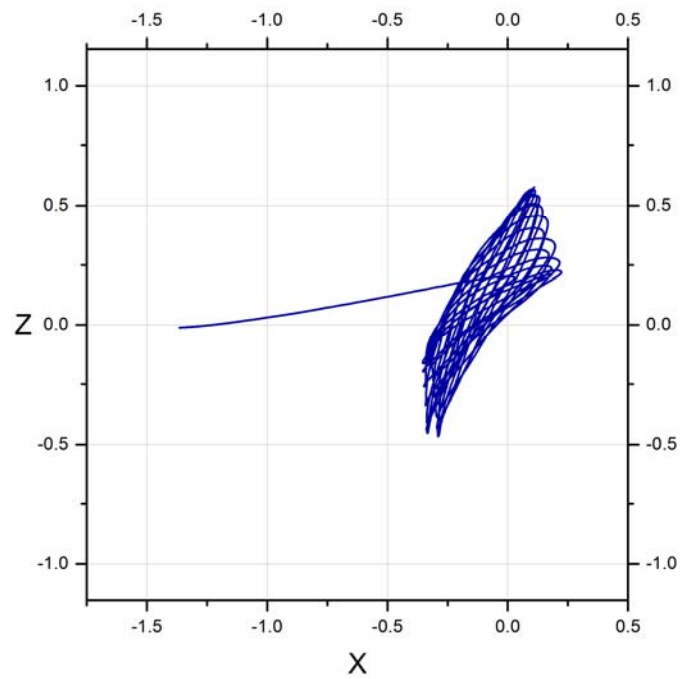


Рис. 5. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

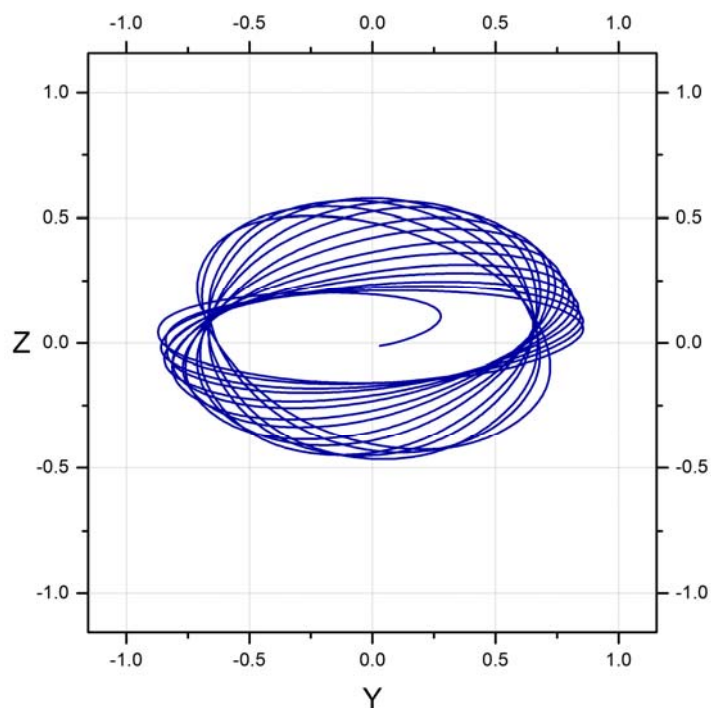


Рис. 6. Проекция квазипериодической орбиты Лиссажу на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

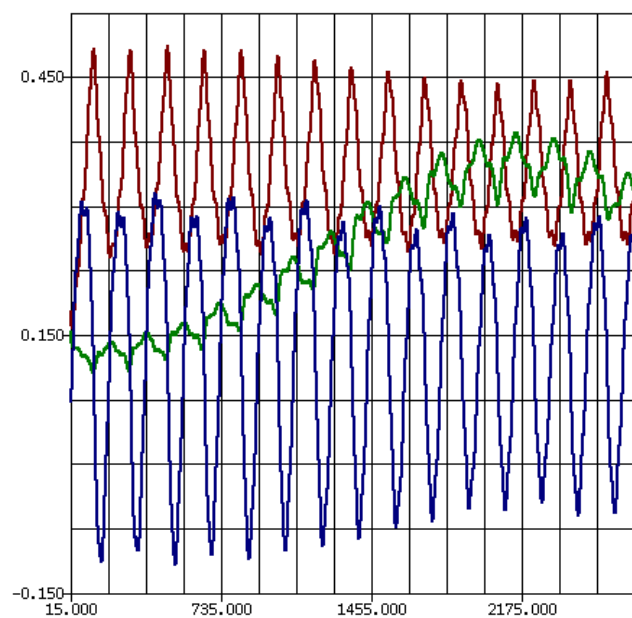


Рис. 7. График эволюции безразмерных параметров θ_A (красный), θ_B (зелёный) и θ_C (синий), характеризующих геометрию и устойчивость представленной орбиты Лиссажу.

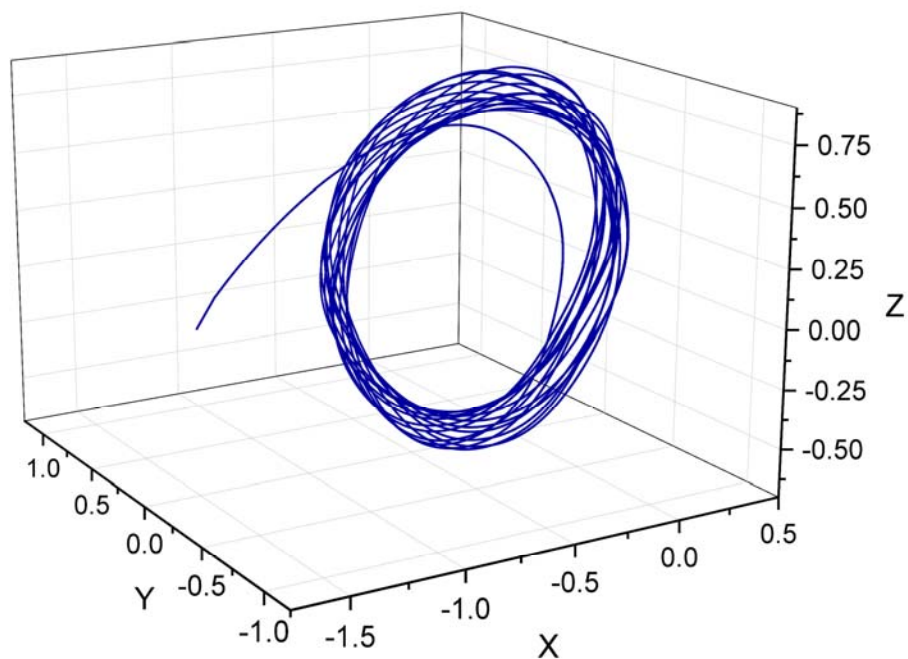


Рис. 8. Пространственная визуализация квази гало-орбиты в СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

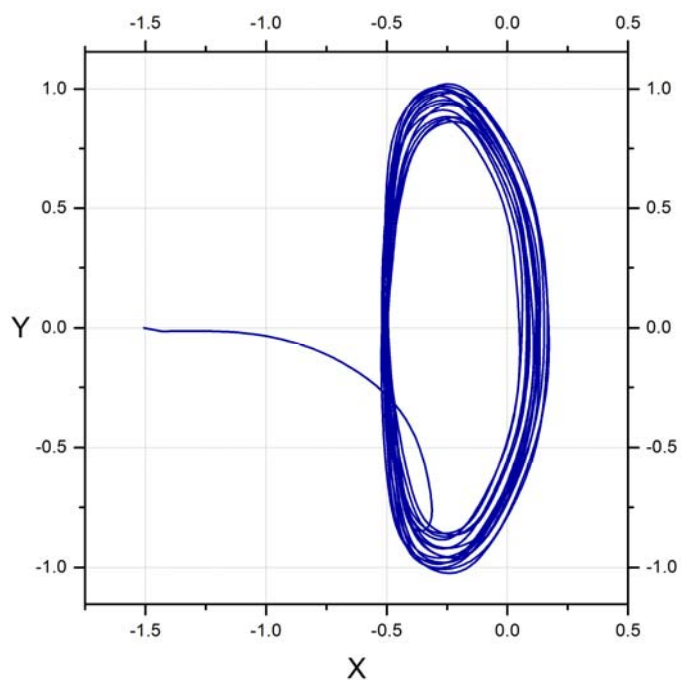


Рис. 9. Проекция квази гало-орбиты на плоскость XY вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

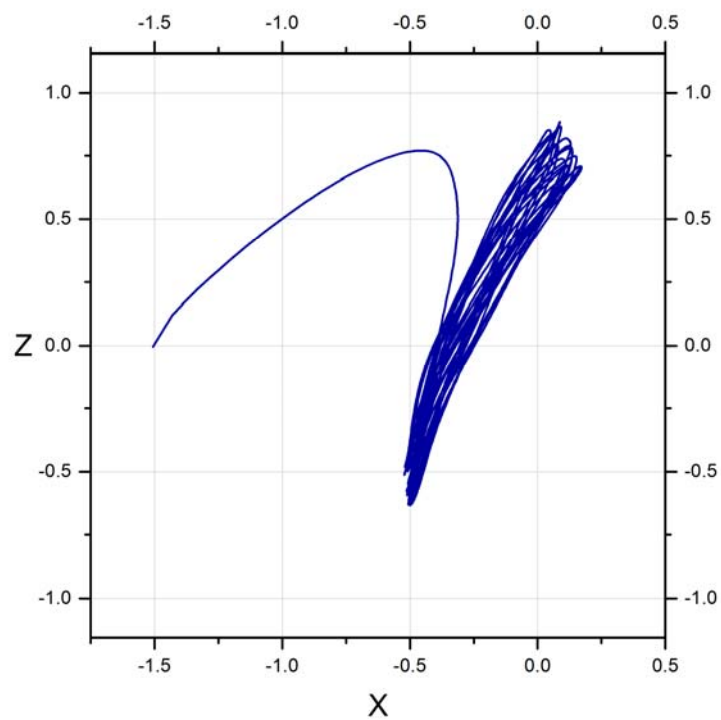


Рис. 10. Проекция квази гало-орбиты на плоскость XZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

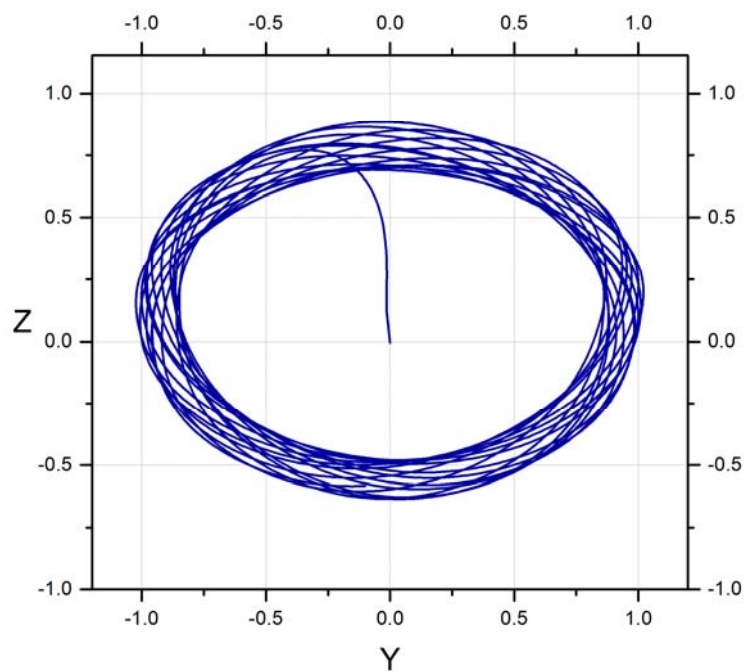


Рис. 11. Проекция квази гало-орбиты на плоскость YZ вращающейся СК с центром в точке L_1 , размерность – млн. км.

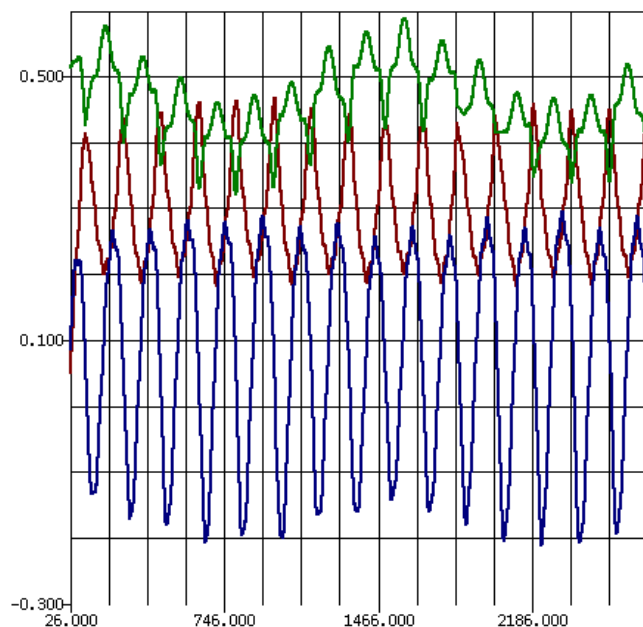


Рис. 12. График эволюции безразмерных параметров θ_A (красный), θ_B (зелёный) и θ_C (синий), характеризующих геометрию и устойчивость представленной орбиты Лиссажу.

Из графиков, представленных на рис. 13, 18 видно, что предложенная методика поддержания квазипериодической орбиты позволяет удерживать значение параметра θ_C близким к нулю без прямого контроля его значения. Параметры θ_A, θ_B также остаются в некоторых коридорах значений для обеих орбит. Изменение коэффициента θ_B с течением времени для орбиты Лиссажу демонстрирует характерную для данного класса орбит эволюцию траектории - постепенное вращение плоскости орбиты на некоторый угол относительно плоскости эклиптики с сохранением параметра θ_A .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена методика формирования квазипериодических орбит заданной геометрии в окрестности коллинеарной точки либрации L_1 системы Солнце-Земля в рамках полной численно-эфемеридной динамической модели Солнечной системы, а также траекторий одноимпульсного перелёта на данные орбиты. Показано, что затраты на поддержание полученных орбит составляют менее 3 м/с в год при условии корректирования орбиты с периодичностью не менее 1 раза в 45 суток. Рассчитанные траектории удовлетворяют всем требованиям проекта СОДА – Системы Обнаружения Дневных Астероидов, предполагающей размещение телескопа, фиксирующего треки небесных тел, подлетающих к Земле со стороны Солнца.

REFERENCES

- [1] I.S. Ilin, “Quasi-periodic orbits in the vicinity of the L_2 libration point of the Sun-Earth System and transfer trajectories in Russian space missions”, *PhD thesis, Keldysh Institute of Applied Mathematics. RAS*, (2015)
URL: <http://www.kiam1.rssi.ru/~ivan/pub.html>
- [2] I.S. Ilin, V.V. Sazonov, A.G. Tuchin, “Construction of the local orbits near the L_2 libration point of the Sun – Earth system”, *Cosmic Research*, **3**, (2014).
- [3] I.S. Ilin, G.S. Zaslavskiy, S.M. Lavrenov, V.V. Sazonov, V.A. Stepanyants, A.G. Tuchin, D.A. Tuchin, V.S. Yaroshevsky, “Halo orbits in the vicinity of the Sun – Earth system L_2 point and the transfer to such orbits”, *Cosmic Research*, **6**, (2014).
- [4] I.S. Ilin, V.V. Sazonov, A.G. Tuchin, “Construction of the local orbits near the L_2 libration point of the Sun – Earth system”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics preprints*, 65, (2012).
URL: http://keldysh.ru/papers/2012/2012_prep2012_65.pdf
- [5] I.S. Ilin, V.V. Sazonov, A.G. Tuchin, “Construction of the flights from low Earth orbits to local orbits near the libration point in the Sun – Earth system”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics preprints*, 66, (2012).
URL: http://keldysh.ru/papers/2012/2012_prep2012_66.pdf
- [6] I.S. Ilin, G.S. Zaslavsky, S.M. Lavrenov, V.V. Sazonov, V.A. Stepanyants, A.G. Tuchin, D.A. Tuchin, V.S. Yaroshevsky, “Ballistic design of transfer trajectories from LEO to halo orbits in Sun-Earth L_2 point vicinity”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics preprints*, 06, (2013).
URL: http://keldysh.ru/papers/2013/2013_prep2013_06.pdf
- [7] I.S. Ilin, “The choice of nominal orbit for Millimetron spacecraft from the families of periodic orbits in the Sun-Earth L_2 point vicinity”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics preprints*, 46, (2013).
URL: http://keldysh.ru/papers/2013/2013_prep2013_46.pdf
- [9] R.W. Farquhar, “The Control and Use of Libration-Point Satellites”, *Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA*, (1968)
- [10] A.P. Markeev, *Libration points in space mechanics and cosmodynamics*, Moscow, «Nauka», (1978).
- [11] G.N. Duboshin, *Celestial mechanics. Analytical and qualitative methods*, Moscow, «Nauka», (1964).
- [13] J.J. Masdemont, “High-order expansions of invariant manifolds of libration point orbits with applications to mission design”, *Dynamical Systems: An International Journal*, **20** (1), 59-113, (2005).

The results were presented at the 15-th International seminar "Mathematical models & modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (September 26 -October 1, 2016, Petrovac, Montenegro).

Received August, 25 2016.