

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ШТРАФОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ШАРНИРНО СВЯЗАННЫХ ТВЁРДЫХ ТЕЛ

М.В. МИХАЙЛЮК, Е.В. СТРАШНОВ

Научно-исследовательский институт системных исследований РАН
Москва, Россия
e-mail: mix@niisi.ras.ru

Ключевые слова: Шарнир, абсолютно твёрдое тело, звено, связи, штрафная сила

Аннотация. При моделировании динамики систем многих тел часто оказывается необходимым производить расчет шарнирных соединений в реальном масштабе времени. Существующие подходы либо предполагают решение больших систем дифференциально-алгебраических уравнений, учитывающих взаимное влияние всех шарниров системы, либо последовательную обработку каждого шарнира без учета влияния на него остальных шарниров. В данной работе предлагается использовать метод штрафных сил, который позволяет с приемлемой точностью проводить все расчеты в режиме реального времени.

SIMULATION OF ARTICULATED RIGID BODIES WITH PENALTY METHOD

M.V. MIKHAYLYUK, E.V. STRASHNOV

Scientific Research Institute for System Analysis of RAS
Moscow, Russia
e-mail: mix@niisi.ras.ru

Summary. A calculation of joints in real time is required when modeling the dynamics of multibody system. Existing approaches either require solution of the large systems of differential-algebraic equations that takes into account of all joints or require sequential processing of each joint without influences of the other joints. In this paper, we propose to use penalty method, which allows carry out all calculations in real time with reasonably accuracy.

1 ВВЕДЕНИЕ

Важной задачей в системах виртуальной реальности является моделирование динамических объектов и систем – транспортных средств, летательных аппаратов, манипуляторов и т.д. В общем случае такие системы представляют собой каким-либо образом соединенные твердые тела. В качестве таких соединений выступают шарниры. Примерами могут служить прицепы, присоединенные к движущим средствам, двери на петлях, соединенные между собой звенья манипуляторов, различные механизмы с твердыми звеньями и т.д. В задачах и технологиях виртуальной реальности моделирование движения таких систем необходимо производить в режиме реального времени, т.е. выполнять расчет каждого модельного шага за время, не превышающее 40 миллисекунд. Это накладывает серьезные требования на выбор алгоритмов расчетов,

2010 Mathematics Subject Classification: 70E55.

Key words and Phrases: Joint, rigid body, link, holonomic constraints, penalty force.

приводит к необходимости разработки новых (быстрых) алгоритмов. В настоящей работе предлагается использовать так называемый метод штрафов при моделировании шарнирных соединений. Идея заключается в том, что на каждом шаге моделирования шарнирное соединение, вообще говоря, расходуется (разрушается), но при этом формируются силы и моменты, которые стремятся восстановить соединение в следующих шагах. Реализация и апробация предложенных алгоритмов показала их адекватность задачам, решаемым в системах динамического моделирования, виртуальных лабораториях и комплексах виртуально окружения.

2 СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ ТЕЛ С ШАРНИРАМИ

Рассмотрим систему абсолютно твёрдых тел (которые мы будем называть звеньями) соединённых шарнирами. Под шарниром будем понимать соединение между двумя звеньями¹, которые оказывают силовое воздействие друг на друга, допускающее их относительное движение. Это силовое взаимодействие обусловлено наличием кинематической связи в месте соединения, поэтому такое соединение называется *кинематической парой*. Таким образом, каждый шарнир соединяет два звена, но каждое звено может быть соединено с одним или более шарнирами.

Для описания структуры такой системы сопоставим ей граф, в котором вершины являются звеньями, а рёбра – шарнирами. Будем рассматривать только такие системы, для которых граф является связным. Тогда для любых двух вершин графа существует один или несколько путей (не содержащих повторяющихся рёбер), соединяющих эти вершины. Если для любых двух вершин такой путь единственный, то система звеньев имеет структуру дерева. Частным случаем дерева является простая цепь, включающая все вершины, причем каждую только один раз. Такая система звеньев называется *открытой кинематической цепью*.

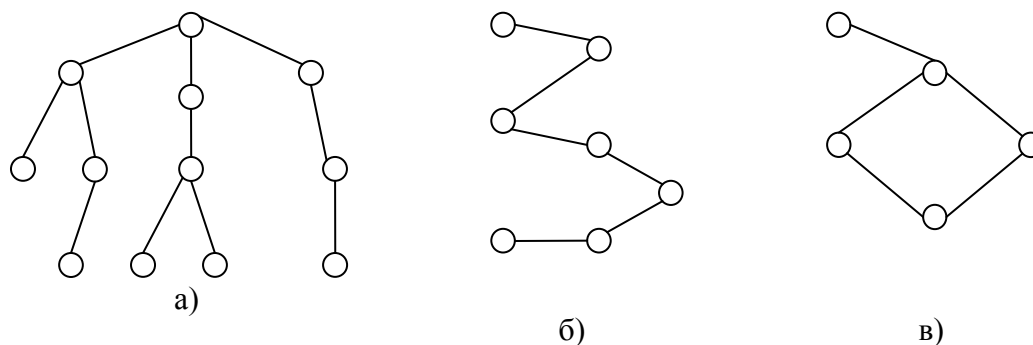


Рис. 1: Примеры систем тел: а) система тел в виде дерева; б) открытая кинематическая цепь; в) система тел, содержащая замкнутую кинематическую цепь

Если в графе существуют циклы (то есть существует пара вершин, которые можно соединить более чем одним путем), то говорят, что такая система содержит *замкнутые кинематические цепи*. На рис. 1 приведены примеры графов, соответствующих различным системам связанных звеньев.

Для описания движения системы тел вводится понятие *степени свободы*. Под степенью свободы тела или системы тел понимается совокупность независимых координат, полностью определяющих положение и ориентацию тела или системы тел. В качестве таких координат для тела можно выбрать 3 поступательных (координаты полюса, например, центра масс тела) и 3 вращательных (координаты поворота вокруг полюса, например, углы Эйлера). На основании теоремы Эйлера данных координат достаточно, чтобы полностью описать положение и ориентацию твёрдого тела в пространстве. Таким образом, система из N свободных твёрдых тел имеет степень свободы $6N$. Шарниры ограничивают степень свободы твёрдых тел, которые они соединяют. Пусть k -ый шарнир ограничивает число степеней свободы на S_k , $k=1, \dots, K$. Тогда степень свободы системы шарнирно связанных твёрдых тел равна $dof = 6N - \sum_{k=1}^K S_k$.

Для составления дифференциальных уравнений, описывающих движение шарнирно связанных звеньев, существует два принципиально разных подхода. Первый подход основан на выборе минимального числа координат, достаточного для однозначного описания системы. Такие координаты в аналитической механике называются *обобщёнными* и их число равно числу степеней свободы системы, т.е. dof . Для системы звеньев, имеющей вид дерева, в качестве обобщенных координат можно выбрать координаты, определяющие положение и ориентацию каждого следующего звена относительно его родителя в дереве. Преимуществом данного подхода является то, что для моделирования шарнирно-связанной в виде дерева системы тел достаточно решения только дифференциальных уравнений, количество которых соответствует степени свободы системы. В случае $dof \ll 6N$ моделирование таких систем тел с помощью данного подхода является достаточно эффективным. К недостаткам данного подхода можно отнести необходимость вычисления на каждом шаге моделирования функциональных зависимостей, на основе которых строится система дифференциальных уравнений. Кроме того, для многих систем тел, содержащих замкнутые цепи, выбор обобщенных координат является затруднительным.

Во втором подходе используется избыточное множество координат, описывающее звенья в системе без учета их взаимосвязей (т.е. рассматривая их, как свободные). При этом выбранные координаты должны удовлетворять алгебраическим ограничениям в виде равенств (билатеральные ограничения), которые в механике называются *связями*. Число связей равно числу степеней свободы, которые ограничивают шарниры, т.е. равно $S = \sum_{k=1}^K S_k$. В отличие от первого подхода, данный подход приводит к так называемой условной задаче, в которой требуется определить положение и ориентацию каждого звена, удовлетворяющих наложенным связям. Условная задача формулируется в виде дифференциально-алгебраических уравнений (ДАУ). Преимуществом данного подхода является его универсальность для различных топологий систем твёрдых тел и относительная простота в формировании уравнений движения. К недостаткам можно отнести то, что формулировка задачи в виде системы ДАУ содержит в себе неизвестные силы реакции связей, которые также необходимо будет вычислять.

Данный подход используется в задачах итеративного моделирования движения твёрдых тел в реальном времени, в компьютерных играх и т.п.

В данной статье будут использоваться методы на основе второго подхода. При этом будем полагать, что связи являются *идеальными*, т.е. силы реакции связей не совершают работу на возможных перемещениях. Это означает, что в шарнирах отсутствует сухое трение. В данной статье будут рассматриваться только *голономные связи*, т.е. в уравнения связей входят только координаты положения и ориентации звеньев, но не входят их скорости.

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Для системы свободных твёрдых тел в мировой системе координат справедливы следующие дифференциальные уравнения Ньютона-Эйлера:

$$M_i \dot{\bar{V}}_i = \bar{F}_i^e, \quad M_i = \begin{bmatrix} m_i I_3 & \Theta \\ \Theta & J_i \end{bmatrix}, \quad \bar{V}_i = (\bar{v}_i \quad \bar{\omega}_i)^T, \quad \bar{F}_i^e = (\bar{f}_i^e \quad \bar{\tau}_i^e)^T, \quad i=1, \dots, N, \quad (1)$$

где для i -го твёрдого тела m_i – его масса, J_i – его тензор инерции, M_i – матрица масс (размерности 6×6), \bar{v}_i и $\bar{\omega}_i$ – его линейная и угловая скорости, \bar{V}_i – его обобщённый вектор скоростей, \bar{f}_i^e и $\bar{\tau}_i^e$ – внешние силы и моменты, действующие на него, \bar{F}_i^e – обобщённый вектор внешних сил и моментов, действующих на него, Θ – нулевая матрица.

Если рассматривать шарнирно связанную систему тел, то уравнения (1) должны быть модифицированы таким образом, чтобы помимо внешних сил, учесть ещё силы реакции связей.

Шарниры описываются с помощью голономных связей следующего вида

$$G_s(\bar{X}_{i_k}, \bar{X}_{j_k}) = 0, \quad s=1, \dots, S; \quad i_k, j_k \in \{1, \dots, N\}; \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad (2)$$

где S – число связей в системе, \bar{X}_{i_k} и \bar{X}_{j_k} – векторы координат звеньев i_k и j_k , соединяемых k -м шарниром.

После дифференцирования (2) получим

$$\dot{G}_s = J_{s i_k}(\bar{X}_{i_k}) \bar{V}_{i_k} + J_{s j_k}(\bar{X}_{j_k}) \bar{V}_{j_k} = 0, \quad s=1, \dots, S; \quad i_k, j_k \in \{1, \dots, N\}; \quad k \in \{1, \dots, K\}, \quad (3)$$

где $J_{s i_k} = \frac{\partial G_s}{\partial \bar{X}_{i_k}}$, $J_{s j_k} = \frac{\partial G_s}{\partial \bar{X}_{j_k}}$ – якобианы (размерности 1×6) для s -ой связи двух тел.

Так как рассматриваются только идеальные связи, то к уравнениям движения двух соединяемых тел от s -ой связи должны быть добавлены силы и моменты реакции связей, направления которых соответствуют якобианам s -ой связи для двух тел⁴, т.е.

$$\bar{F}_{i_k}^{c,s} = J_{s i_k}^T \lambda_s, \quad \bar{F}_{j_k}^{c,s} = J_{s j_k}^T \lambda_s, \quad (4)$$

где λ_s – неизвестные множители Лагранжа, определяющие величину силы реакции связи.

Добавляя все реакции связей вида (4) к уравнениям (1), получим:

$$M_i \dot{\bar{V}}_i = \bar{F}_i^e + \sum_{s \in S_i} \bar{F}_i^{c,s} = \bar{F}_i^e + \sum_{s \in S_i} J_{si}^T \lambda_s, \quad i=1, \dots, N, \quad (5)$$

где S_i – множество номеров уравнений связей, которые ограничивают i -е звено.

Объединяя уравнения (5) для всех тел системы и уравнения (2) и (3) для всех связей, получим:

$$\begin{aligned} M\dot{\bar{V}} &= \bar{F}^e + J^T \bar{\lambda}, \\ \bar{G}(\bar{X}) &= \bar{0}, \\ \dot{\bar{G}}(\bar{X}, \bar{V}) &= J\bar{V} = \bar{0}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_N)$ – диагональная матрица масс (размерности $6N \times 6N$), $\bar{G} = (G_1, G_2, \dots, G_S)^T$ – вектор всех связей в системе, \bar{X} – обобщённый вектор координат, \bar{V} – обобщённый вектор скоростей системы (размерности $6N \times 1$), \bar{F}^e – обобщённый вектор всех внешних сил и моментов (размерности $6N \times 1$), J – якобиан системы (размерности $S \times 6N$), $\bar{\lambda}$ – вектор множителей Лагранжа (размерности $S \times 1$).

Уравнения (6) представляют собой дифференциально-алгебраические уравнения, описывающие движение системы тел с шарнирами.

4 МЕТОД ШТРАФОВ

4.1 Применение метода штрафов для решения системы ДАУ

Метод штрафов для решения ДАУ вида (6) состоит в том, что вместо сил реакции связей, содержащих неизвестные переменные $\bar{\lambda}$, рассматриваются полностью определённые штрафные силы, которые строятся на основе связей и их производных вида (2) и (3). Данный подход позволяет перейти от условной формулировки задачи (содержащей алгебраические уравнения) к безусловной формулировке (содержащей только дифференциальные уравнения).

В методе штрафов рассматривается штрафная функция в виде положительно-определённой квадратичной формы

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{2} \bar{G}^T \alpha \bar{G} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \alpha_s G_s^2, \quad (7)$$

где $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_S)$ – диагональная матрица коэффициентов (называемых коэффициентами упругости), причём все $\alpha_s > 0$, $s=1, \dots, S$. Эти коэффициенты задаются заранее, исходя из динамических характеристик звеньев и шага моделирования по времени.

На основе свойства положительно-определённой квадратичной формы штрафная функция (7) равна нулю тогда и только тогда, когда $\bar{G}(\bar{X}) = \bar{0}$, в остальных случаях она положительна.

Таким образом, ограничения вида (2) выполнены на минимуме штрафной функции (7), поэтому задача нахождения положения и ориентации каждого звена с учётом связей сводится к минимизации штрафной функции (7).

Решение задачи минимизация штрафной функции, как функции нескольких переменных, заменяется введением штрафных сил (в направлении убывания штрафной функции) следующего вида

$$\bar{F}^{pen} = -\nabla E = -\frac{\partial \bar{G}}{\partial \bar{X}} \alpha \bar{G} = -J^T \alpha \bar{G}. \quad (8)$$

Штрафные силы (8) можно рассматривать как силы фиктивных пружин, заменяющих шарниры. Для уменьшения осцилляций вокруг точки, где $\bar{G} = \bar{0}$ в штрафные силы (8) вводятся ограничения по скоростям вида (3), поэтому штрафные силы (8) модифицируются следующим образом

$$\bar{F}^{pen} = -J^T (\alpha \bar{G} + \beta \dot{\bar{G}}), \quad (9)$$

где $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s)$ – диагональная матрица коэффициентов (называемых коэффициентами демпфирования), причём все $\beta_s > 0$, $s = 1, \dots, S$. Данные коэффициенты задаются заранее на основе динамических характеристик и шага моделирования по времени.

Штрафные силы (9) являются, таким образом, аналогами пружинно-демпферных сил.

Введение штрафных сил сводит задачу ДАУ к задаче решения дифференциальных уравнений вида

$$M\dot{\bar{V}} = \bar{F}^e + \bar{F}^{pen} = \bar{F}^e + J^T (-\alpha \bar{G} - \beta \dot{\bar{G}}). \quad (10)$$

Сравнивая (10) и (6), можно заметить, что в методе штрафов вычисляется приближенное значение $\bar{\lambda}^*$ вектора множителей Лагранжа

$$\bar{\lambda}^* = -\alpha \bar{G} - \beta \dot{\bar{G}}.$$

Если увеличивать коэффициенты упругости и демпфирования, то точность приближения $\bar{\lambda}^*$ к вектору множителей Лагранжа увеличивается.

4.2 Формирование штрафных сил для некоторых шарниров

Рассмотрим некоторые примеры шарниров (сферический, осевой, шарнир Гука и призматический). Для описания относительного движения звеньев, соединённых шарниром, введём две системы координат, одна из которых жёстко связана с i -м звеном, другая – с j -м звеном. Ориентацию этих систем координат будем определять через орты, сонаправленные с осями координат: $\{\bar{n}_{i0}, \bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2}\}$ – орты систем координат i -го звена, $\{\bar{n}_{j0}, \bar{n}_{j1}, \bar{n}_{j2}\}$ – орты систем координат j -го звена. Предполагая, что в начальный момент времени эти две системы координат совпадают (за исключением

призматического шарнира), для каждого шарнира выпишем уравнения связей и их производных, входящих в уравнения (9).

4.2.1 Формирование штрафных сил для сферического шарнира

Сферический шарнир представляет собой соединение, при котором два звена не могут перемещаться относительно друг друга, но могут свободно вращаться друг относительно друга. При правильной работе данного шарнира начала систем координат, связанных с шарниром, совпадают и находятся в точке расположения этого шарнира. Тем самым, сферический шарнир ограничивает 3 степени свободы, поэтому необходимо выписать 3 уравнения связи.

Пусть \bar{r}_i , \bar{r}_j определяют положение центров масс C_i и C_j двух взаимосвязанных звеньев в мировой системе координат, $\bar{\xi}_i$, $\bar{\xi}_j$ определяют векторы от этих центров масс до шарнира (см. рис. 2).

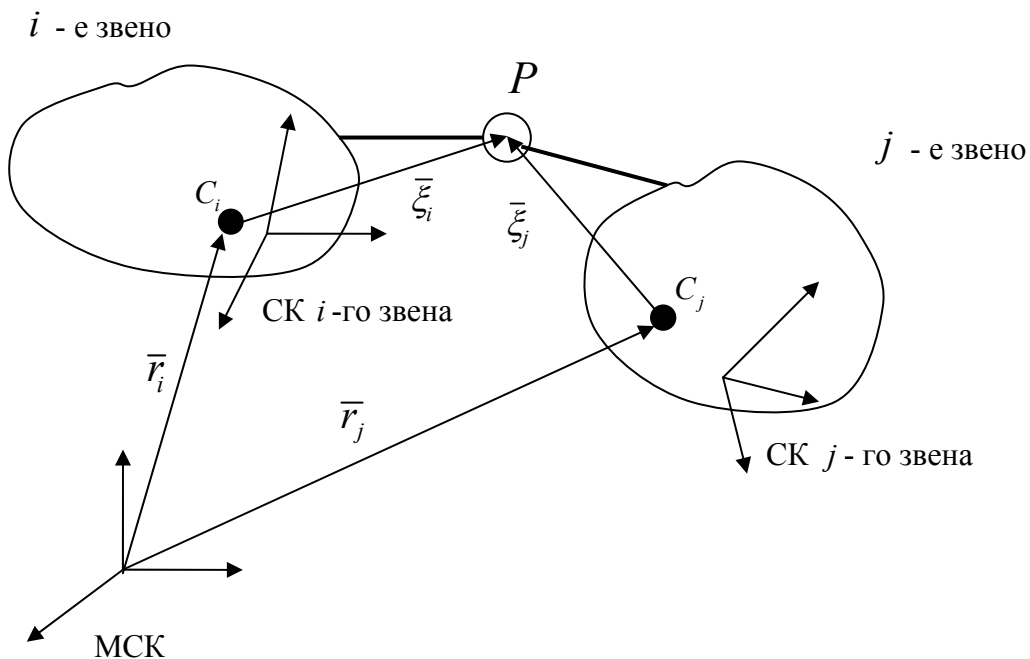


Рис. 2: Сферический шарнир

Выражая вектор положения шарнира в мировой системе координат через векторы \bar{r}_i , \bar{r}_j , получаем:

$$\bar{G} = \bar{r}_i + \bar{\xi}_i - \bar{r}_j - \bar{\xi}_j = \bar{0}. \quad (11)$$

После дифференцирования (11), имеем

$$\dot{\bar{G}} = \dot{\bar{v}}_i + \bar{\omega}_i \times \bar{\xi}_i - \dot{\bar{v}}_j - \bar{\omega}_j \times \bar{\xi}_j = \bar{0}. \quad (12)$$

Выделяя в (12) обобщенный вектор скоростей, получим

$$\dot{\bar{G}} = J_i \bar{V}_i + J_j \bar{V}_j = \begin{bmatrix} E & -skew(\bar{\xi}_i) \end{bmatrix} \bar{V}_i + \begin{bmatrix} -E & skew(\bar{\xi}_j) \end{bmatrix} \bar{V}_j = \bar{0},$$

где J_i и J_j – якобианы размерности 3×6 , $skew(\bar{r})$ – кососимметричная матрица, которая определяется как

$$skew(\bar{r}) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = (x \ y \ z)^T.$$

К i -му и j -му звену, согласно (9), прикладываются штрафные силы вида

$$\bar{F}_i^{pen} = \begin{bmatrix} E \\ skew(\bar{\xi}_i) \end{bmatrix} (-\alpha \bar{G} - \beta \dot{\bar{G}}),$$

$$\bar{F}_j^{pen} = \begin{bmatrix} E \\ skew(\bar{\xi}_j) \end{bmatrix} (\alpha \bar{G} + \beta \dot{\bar{G}}).$$

Выделяя в этих равенствах отдельно штрафные силы и моменты, получим:

$$\bar{f}_i^{pen} = -\alpha \bar{G} - \beta \dot{\bar{G}}, \quad \bar{\tau}_i^{pen} = \bar{\xi}_i \times \bar{f}_i^{pen},$$

$$\bar{f}_j^{pen} = \alpha \bar{G} + \beta \dot{\bar{G}}, \quad \bar{\tau}_j^{pen} = \bar{\xi}_j \times \bar{f}_j^{pen}.$$

4.2.2 Формирование штрафных сил для осевого шарнира

Осевой шарнир представляет собой соединение, которое запрещает относительное перемещение звеньев и разрешает относительное вращение только вокруг одной оси. Тем самым, осевой шарнир ограничивает 5 степеней свободы. На рис. 3 изображено соединение двух звеньев с помощью осевого шарнира.

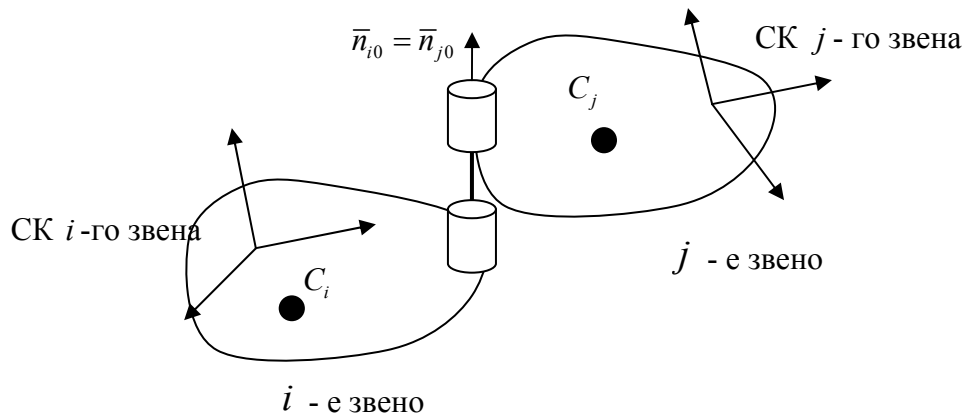


Рис. 3: Осевой шарнир

Штрафные силы и моменты, которые ограничивают поступательные степени свободы, выписываются аналогично сферическому шарниру:

$$\begin{aligned}\bar{f}_i^{pen,1} &= -\alpha\bar{G}_1 - \beta\dot{\bar{G}}_1, & \bar{\tau}_i^{pen,1} &= \bar{\xi}_i \times \bar{f}_i^{pen,1}, \\ \bar{f}_j^{pen,1} &= \alpha\bar{G}_1 + \beta\dot{\bar{G}}_1, & \bar{\tau}_j^{pen,1} &= \bar{\xi}_j \times \bar{f}_j^{pen,1}.\end{aligned}\quad (13)$$

Здесь уравнения связей и их производных аналогичны уравнениям (11) и (12).

Системы координат, связанных с шарниром, выбираем таким образом, чтобы орты \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j0} были сонаправлены с осью относительного вращения. При правильной работе шарнира \bar{n}_{j0} всегда будет совпадать с \bar{n}_{i0} и осью вращения шарнира, т.е. \bar{n}_{j0} будет перпендикулярна \bar{n}_{i1} и \bar{n}_{i2} . Таким образом, получаем следующие уравнения связей:

$$G_2 = \bar{n}_{i1} \cdot \bar{n}_{j0} = 0, \quad G_3 = \bar{n}_{i2} \cdot \bar{n}_{j0} = 0. \quad (14)$$

Дифференцируя (14), получим условие относительно скоростей

$$\begin{aligned}\dot{G}_2 &= (\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i1}) \cdot \bar{n}_{j0} + \bar{n}_{i1} \cdot (\bar{\omega}_j \times \bar{n}_{j0}) = (\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j0}) \cdot \bar{\omega}_i + (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1}) \cdot \bar{\omega}_j = \\ &(\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1})^T \end{bmatrix} \bar{V}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1})^T \end{bmatrix} \bar{V}_j = 0, \\ \dot{G}_3 &= (\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i2}) \cdot \bar{n}_{j0} + \bar{n}_{i2} \cdot (\bar{\omega}_j \times \bar{n}_{j0}) = (\bar{n}_{i2} \times \bar{n}_{j0}) \cdot \bar{\omega}_i + (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2}) \cdot \bar{\omega}_j = \\ &(\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2})^T \end{bmatrix} \bar{V}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2})^T \end{bmatrix} \bar{V}_j = 0.\end{aligned}$$

При стремлении вектора \bar{n}_{j0} к вектору \bar{n}_{i0} условия относительно скоростей переписутся в следующем виде

$$\begin{aligned}\dot{G}_2 &= (\bar{n}_{i0} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \bar{n}_{i2} \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = 0, \\ \dot{G}_3 &= (\bar{n}_{i0} \times \bar{n}_{i2}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = -\bar{n}_{i1} \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = 0.\end{aligned}$$

Данные условия означают, что проекции угловых скоростей звеньев на другие оси, перпендикулярные относительной оси вращения, равны.

К соединяемым твёрдым телам, согласно (9), прикладываются штрафные моменты вида

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_i^{pen,2} &= (\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2) (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1}), & \bar{\tau}_j^{pen,2} &= -(\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2) (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1}), \\ \bar{\tau}_i^{pen,3} &= (\alpha_3 G_3 + \beta_3 \dot{G}_3) (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2}), & \bar{\tau}_j^{pen,3} &= -(\alpha_3 G_3 + \beta_3 \dot{G}_3) (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2}), \\ \alpha_2, \alpha_3, \beta_2, \beta_3 &> 0.\end{aligned}$$

4.2.3 Формирование штрафных сил для шарнира Гука

Универсальный шарнир или шарнир Гука является примером шарнира с двумя вращательными степенями свободы. Пусть система координат $(\bar{n}_{i0}, \bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2})$ шарнира жестко связана с первым звеном, а система координат $(\bar{n}_{j0}, \bar{n}_{j1}, \bar{n}_{j2})$ жестко связана со вторым звеном, причем в начальный момент времени $\bar{n}_{i0} \perp \bar{n}_{j1}$. Относительное вращение звеньев разрешается вокруг оси \bar{n}_{i0} (при этом вращается только первое звено

вместе с жестко связанной с ней системой координат) и вокруг оси \bar{n}_{j1} (при этом вращается только второе звено вместе с жестко связанной с ней системой координат). Таким образом, универсальный шарнир ограничивает 4 степени свободы. На рис. 4 изображено соединение двух звеньев с помощью универсального шарнира.

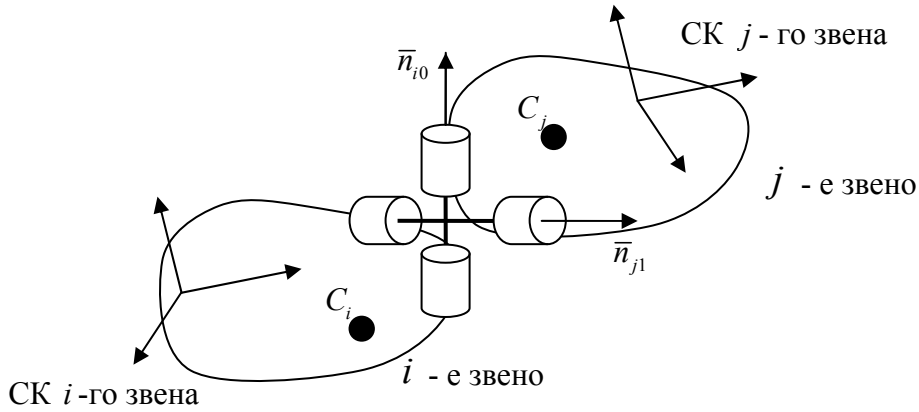


Рис. 4: Универсальный шарнир

Аналогично осевому шарниру, нужно добавить штрафные силы вида (13), чтобы ограничить поступательное перемещение двух звеньев относительно друг друга. Для вращения условие связи записывается в виде

$$G_2 = \bar{n}_{i0} \cdot \bar{n}_{j1} = 0. \quad (15)$$

Действительно, при работе такого шарнира оси \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j1} всегда остаются перпендикулярными друг другу. С другой стороны, если условие (15) выполнено, то ориентацию $\{\bar{n}_{i0}, \bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2}\}$ можно перевести в любую ориентацию $\{\bar{n}_{j0}, \bar{n}_{j1}, \bar{n}_{j2}\}$ с помощью поворотов только вокруг осей \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j1} . Действительно, т.к. $\bar{n}_{i0} \perp \bar{n}_{j1}$, то можно осуществить поворот вокруг оси \bar{n}_{i0} на некоторый угол так, что ось \bar{n}_{i1} совпадет с осью \bar{n}_{j1} . Теперь можно осуществить поворот вокруг оси \bar{n}_{j1} пока \bar{n}_{j0} не совпадет с \bar{n}_{i0} . После этого третьи оси обеих систем автоматически совпадут. Таким образом, условие (15) необходимо и достаточно для правильной работы универсального шарнира.

Дифференцируя уравнение связи аналогично осевому шарниру, получим условие относительно скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{G}_2 &= (\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i0}) \cdot \bar{n}_{j1} + \bar{n}_{i0} \cdot (\bar{\omega}_j \times \bar{n}_{j1}) = (\bar{n}_{i0} \times \bar{n}_{j1}) \cdot \bar{\omega}_i + (\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0}) \cdot \bar{\omega}_j = \\ &(\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0})^T \end{bmatrix} \bar{V}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0})^T \end{bmatrix} \bar{V}_j = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, к твёрдым телам согласно (9), прикладываются штрафные моменты вида

$$\bar{\tau}_i^{pen,2} = (\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2)(\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0}), \quad \bar{\tau}_j^{pen,2} = -(\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2)(\bar{n}_{j1} \times \bar{n}_{i0}), \quad \alpha_2, \beta_2 > 0.$$

4.2.4 Формирование штрафных сил для призматического шарнира

Призматический шарнир разрешает только относительное перемещение двух соединяемых звеньев и только вдоль одного направления. Поэтому требуется 5 уравнений связей. На рис. 5 изображено соединение двух звеньев с помощью призматического шарнира.

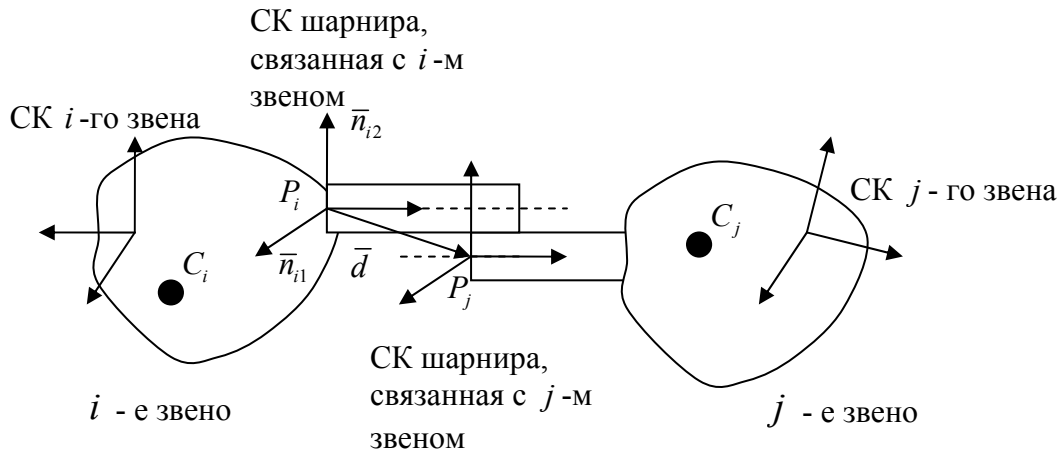


Рис. 5: Призматический шарнир

Выберем системы координат, связанных с шарниром, таким образом, чтобы относительное движение звеньев, соединённых шарниром, совершалось вдоль осей, определяемых ортами \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j0} . Положения этих систем координат определяются радиус-векторами \bar{r}_i^P и \bar{r}_j^P соответственно, а ориентации совпадают.

Сформируем уравнения связи, ограничивающих относительное перемещение звеньев. При правильной работе шарнира расстояния от точки P_j до плоскостей, определяемых ортами \bar{n}_{i0} , \bar{n}_{i2} и ортами \bar{n}_{j0} , \bar{n}_{j1} сохраняются. Это означает, что проекции вектора $\bar{d} = \bar{r}_j^P - \bar{r}_i^P$ на орты \bar{n}_{i1} и \bar{n}_{i2} должны сохраняться, то есть

$$\begin{aligned} G_1 &= (\bar{r}_i^P - \bar{r}_j^P) \cdot \bar{n}_{i1} + c_1 = 0, \\ G_2 &= (\bar{r}_i^P - \bar{r}_j^P) \cdot \bar{n}_{i2} + c_2 = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

где c_1 и c_2 – расстояния до плоскостей, определяемых ортами \bar{n}_{i0} , \bar{n}_{i2} и ортами \bar{n}_{j0} , \bar{n}_{j1} соответственно.

Обозначая через \bar{r}_i и \bar{r}_j вектора, определяющие положения центров масс звеньев в мировой системе координат, и дифференцируя уравнения связи (16) по времени, получим:

$$\begin{aligned}
\dot{G}_1 &= (\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{r}_i^P - \bar{r}_i) - \bar{v}_j - \bar{\omega}_j \times (\bar{r}_j^P - \bar{r}_j)) \cdot \bar{n}_{i1} + (\bar{r}_i^P - \bar{r}_j^P) \cdot (\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i1}) = \\
&\bar{n}_{i1} \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{n}_{i1}] \cdot \bar{\omega}_i - [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{n}_{i1}] \cdot \bar{\omega}_j = \\
&[\bar{n}_{i1}^T \quad -\bar{n}_{i1}^T skew(\bar{r}_j^P - \bar{r}_i)] \bar{V}_i + [-\bar{n}_{i1}^T \quad \bar{n}_{i1}^T skew(\bar{r}_j^P - \bar{r}_j)] \bar{V}_j = 0, \\
\dot{G}_2 &= (\bar{v}_i + \bar{\omega}_i \times (\bar{r}_i^P - \bar{r}_i) - \bar{v}_j - \bar{\omega}_j \times (\bar{r}_j^P - \bar{r}_j)) \cdot \bar{n}_{i2} + (\bar{r}_i^P - \bar{r}_j^P) \cdot (\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i2}) = \\
&\bar{n}_{i2} \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{n}_{i2}] \cdot \bar{\omega}_i - [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{n}_{i2}] \cdot \bar{\omega}_j = \\
&[\bar{n}_{i2}^T \quad -\bar{n}_{i2}^T skew(\bar{r}_j^P - \bar{r}_i)] \bar{V}_i + [-\bar{n}_{i2}^T \quad \bar{n}_{i2}^T skew(\bar{r}_j^P - \bar{r}_j)] \bar{V}_j = 0.
\end{aligned} \tag{17}$$

К соединяемым звеньям на основе (16) и (17) добавляются штрафные силы:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_i^{pen,1} &= -(\alpha_1 G_1 + \beta_1 \dot{G}_1) \bar{n}_{i1}, \quad \bar{\tau}_i^{pen,1} = (\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{f}_i^{pen,1}, \\
\bar{f}_j^{pen,1} &= (\alpha_1 G_1 + \beta_1 \dot{G}_1) \bar{n}_{i1}, \quad \bar{\tau}_j^{pen,1} = (\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{f}_j^{pen,1}, \\
\bar{f}_i^{pen,2} &= -(\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2) \bar{n}_{i2}, \quad \bar{\tau}_i^{pen,2} = (\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{f}_i^{pen,2}, \\
\bar{f}_j^{pen,2} &= (\alpha_2 G_2 + \beta_2 \dot{G}_2) \bar{n}_{i2}, \quad \bar{\tau}_j^{pen,2} = (\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{f}_j^{pen,2}, \\
\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 &> 0.
\end{aligned}$$

Для ограничения относительного вращения двух звеньев сформируем 3 уравнения связи, которые обеспечивают одинаковую ориентацию двух систем координат шарнира. Один из вариантов таких ограничений может быть сформирован следующим образом

$$G_3 = \bar{n}_{i1} \cdot \bar{n}_{j0} = 0, \quad G_4 = \bar{n}_{i2} \cdot \bar{n}_{j0} = 0, \quad G_5 = \bar{n}_{i1} \cdot \bar{n}_{j2} = 0. \tag{18}$$

Дифференцируя (18), получим условия относительно скоростей

$$\begin{aligned}
\dot{G}_3 &= (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{n}_{i1}^T skew(\bar{n}_{j0})] \bar{V}_i + \\
&[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\bar{n}_{i1}^T skew(\bar{n}_{j0})] \bar{V}_j = 0, \\
\dot{G}_4 &= (\bar{n}_{j0} \times \bar{n}_{i2}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{n}_{i2}^T skew(\bar{n}_{j0})] \bar{V}_i + \\
&[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\bar{n}_{i2}^T skew(\bar{n}_{j0})] \bar{V}_j = 0, \\
\dot{G}_5 &= (\bar{n}_{j2} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{n}_{i1}^T skew(\bar{n}_{j2})] \bar{V}_i + \\
&[0 \quad 0 \quad 0 \quad -\bar{n}_{i1}^T skew(\bar{n}_{j2})] \bar{V}_j = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

При стремлении ортов $\{\bar{n}_{j0}, \bar{n}_{j1}, \bar{n}_{j2}\}$ одной системы координат к ортам $\{\bar{n}_{i0}, \bar{n}_{i1}, \bar{n}_{i2}\}$ другой системы координат получим, что условия (19) переписутся в следующем виде

$$\begin{aligned}
\dot{G}_3 &= (\bar{n}_{i0} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \bar{n}_{i2} \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = 0, \\
\dot{G}_4 &= (\bar{n}_{i0} \times \bar{n}_{i2}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = -\bar{n}_{i1} \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = 0, \\
\dot{G}_5 &= (\bar{n}_{i2} \times \bar{n}_{i1}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = -\bar{n}_{i0} \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = 0.
\end{aligned}$$

Это означает, что угловые скорости двух звеньев совпадают.

На основе (18) и (19) к двум связанным звеньям прикладываются штрафные моменты вида

$$\begin{aligned}\bar{\tau}_i^{pen,3} &= \bar{n}_{j_0} \times (\alpha_3 G_3 + \beta_3 \dot{G}_3) \bar{n}_{i1}, & \bar{\tau}_j^{pen,3} &= -\bar{n}_{j_0} \times (\alpha_3 G_3 + \beta_3 \dot{G}_3) \bar{n}_{i1}, \\ \bar{\tau}_i^{pen,4} &= \bar{n}_{j_0} \times (\alpha_4 G_4 + \beta_4 \dot{G}_4) \bar{n}_{i2}, & \bar{\tau}_j^{pen,4} &= -\bar{n}_{j_0} \times (\alpha_4 G_4 + \beta_4 \dot{G}_4) \bar{n}_{i2}, \\ \bar{\tau}_i^{pen,5} &= \bar{n}_{j_2} \times (\alpha_5 G_5 + \beta_5 \dot{G}_5) \bar{n}_{i1}, & \bar{\tau}_j^{pen,5} &= -\bar{n}_{j_2} \times (\alpha_5 G_5 + \beta_5 \dot{G}_5) \bar{n}_{i1}, \\ \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \beta_3, \beta_4, \beta_5 &> 0.\end{aligned}$$

4.3 Формирование ограничений на величину относительного движения звеньев

Помимо ограничений на степени свободы, в шарнирах также возникают ограничения на величину относительного движения соединяемых звеньев. Например, для осевого шарнира можно потребовать, чтобы угол φ поворота в шарнире вокруг оси \bar{n}_{i_0} менялся в пределах от $-\varphi^*$ до φ^* , где $\varphi^* \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Данный угол определяется через скалярное произведение ортов \bar{n}_{i1} и \bar{n}_{j_2} , то есть $G = -\bar{n}_{i1} \cdot \bar{n}_{j_2} = -\cos(90^\circ + \varphi) = \sin(\varphi)$. Чтобы угол φ поворота не превышал значения φ^* должно быть выполнено условие

$$|G| = |-\bar{n}_{i1} \cdot \bar{n}_{j_2}| = |\sin(\varphi)| \leq \sin(\varphi^*). \quad (20)$$

Для того чтобы перейти от ограничения в виде неравенства (20) к ограничению в виде равенства рассмотрим следующую функцию

$$\chi(G) = \begin{cases} 0, & |G| \leq \sin(\varphi^*); \\ G - \text{sgn}(G) \sin(\varphi^*), & |G| > \sin(\varphi^*), \end{cases} \quad (21)$$

где $\text{sgn}(G)$ – функция знака, которая определяется как

$$\text{sgn}(G) = \begin{cases} 1, & G > 0; \\ 0, & G = 0; \\ -1, & G < 0. \end{cases}$$

Продифференцируем функцию $\chi(G)$, определяемую (21), по времени:

$$\dot{\chi} = \begin{cases} 0, & |G| \leq \sin(\varphi^*); \\ \dot{G} - 2\delta(G)\dot{G}\sin(\varphi^*), & |G| > \sin(\varphi^*), \end{cases}$$

где $\delta(G)$ – дельта-функция Дирака, которая определяется как

$$\delta(G) = \begin{cases} 0, & G \neq 0; \\ \infty, & G = 0. \end{cases}$$

Так как по условию $\varphi^* > 0$, то $\delta(G) \equiv 0$ при $|G| > \sin(\varphi^*)$. Следовательно, условие для скоростей примет вид

$$\dot{\chi} = \begin{cases} 0, & |G| \leq \sin(\varphi^*); \\ \dot{G}, & |G| > \sin(\varphi^*), \end{cases} \quad (22)$$

где \dot{G} определяется как

$$\begin{aligned} \dot{G} &= -(\bar{\omega}_i \times \bar{n}_{i1}) \cdot \bar{n}_{j2} - \bar{n}_{i1} \cdot (\bar{\omega}_j \times \bar{n}_{j2}) = \\ &= (\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j2}) \cdot (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j2})^T \end{bmatrix} \bar{V}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & (\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j2})^T \end{bmatrix} \bar{V}_j. \end{aligned}$$

На основе ограничений (21) и (22) согласно (9) к двум звеньям прикладываются штрафные моменты:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i^{pen} &= (\alpha\chi + \beta\dot{\chi})(\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j2}), \\ \bar{\tau}_j^{pen} &= -(\alpha\chi + \beta\dot{\chi})(\bar{n}_{i1} \times \bar{n}_{j2}), \\ \alpha, \beta &> 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (10) с учётом штрафных моментов (23) будут удовлетворять условиям Каратеодори², тем самым решение уравнения (10) существует и единственно.

Для шарнира Гука можно ввести следующие ограничения: угол поворота φ_1 вокруг оси \bar{n}_{i0} (т.е. угол между \bar{n}_{i1} и \bar{n}_{j1}) может изменяться от $-\varphi_1^*$ до φ_1^* , а угол поворота φ_2 вокруг оси \bar{n}_{j1} (т.е. угол между \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j0}) может изменяться от $-\varphi_2^*$ до φ_2^* . Тогда синусы углов поворотов можно определить аналогично (20) через скалярные произведения соответственно ортов \bar{n}_{i2} и \bar{n}_{j1} и ортов \bar{n}_{i0} и \bar{n}_{j2} . После этого, ограничения строятся аналогично (20) – (22), а штрафные моменты формируются в виде (23).

Для призматического шарнира можно потребовать, чтобы относительное перемещение L находилось в пределах от $-L^*$ до L^* . Тогда можно сформировать ограничение в следующем виде

$$|G| = |(\bar{r}_i^P - \bar{r}_j^P) \cdot \bar{n}_{i0}| \leq L^*. \quad (24)$$

Чтобы перейти от ограничения в виде неравенства (24) к равенству рассмотрим следующую функцию

$$\chi(G) = \begin{cases} 0, & |G| \leq L^*; \\ G - \text{sgn}(G)L^*, & |G| > L^*. \end{cases} \quad (25)$$

Аналогично ограничениям для осевого шарнира производная от функции (25) примет вид

$$\dot{\chi} = \begin{cases} 0, & |G| \leq L^*; \\ \dot{G}, & |G| > L^*, \end{cases} \quad (26)$$

где \dot{G} определяется как

$$\dot{G} = \bar{n}_{i0} \cdot (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{n}_{i0}] \cdot \bar{\omega}_i - [(\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{n}_{i0}] \cdot \bar{\omega}_j.$$

На основе ограничений (25) и (26) согласно (9) к двум звеньям прикладываются штрафные силы и моменты:

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^{pen} &= -[\alpha\chi + \beta\dot{\chi}]\bar{n}_{i0}, & \bar{\tau}_i^{pen} &= (\bar{r}_j^P - \bar{r}_i) \times \bar{f}_i^{pen}, \\ \bar{f}_j^{pen} &= [\alpha\chi + \beta\dot{\chi}]\bar{n}_{i0}, & \bar{\tau}_j^{pen} &= (\bar{r}_j^P - \bar{r}_j) \times \bar{f}_j^{pen}, \\ \alpha, \beta &> 0. \end{aligned}$$

Ограничения на относительные углы поворотов в сферическом шарнире формируются более сложным образом и в данной работе не рассматриваются.

5 ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для получения вектора обобщённых скоростей и вектора обобщённых координат система дифференциальных уравнений (10) дополняется кинематическими уравнениями:

$$\dot{\bar{X}} = H(\bar{X})\bar{V}, \quad (27)$$

где $H(\bar{X})$ – функциональная матрица, связывающая производные вектора обобщённых координат с обобщённым вектором скоростей.

При выборе достаточно больших коэффициентов упругости α и коэффициентов демпфирования β , мы получаем, что задача (10), (27) становится жёсткой, и вследствие этого возникают трудности при интегрировании уравнений движения (10), (27). В качестве метода решения жёстких систем дифференциальных уравнений могут быть использованы неявные схемы интегрирования, однако это требует дополнительных вычислений для решения систем нелинейных уравнений. Поэтому будем предполагать, что для моделирования мы можем выбрать достаточно малый шаг интегрирования, а в качестве схемы выберем полунеявную схему метода Эйлера, в которой для получения координат, определяющих положение и ориентацию тел, на очередном шаге используются полученные на этом шаге скорости:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_{t+\Delta t} - \bar{V}_t}{\Delta t} &= M^{-1}(\bar{F}^e + J^T(-\alpha\bar{G} - \beta\dot{\bar{G}})) = \bar{F}(\bar{X}_t, \bar{V}_t), \\ \frac{\bar{X}_{t+\Delta t} - \bar{X}_t}{\Delta t} &= H(\bar{X}_t)\bar{V}_{t+\Delta t}, \end{aligned}$$

где $M^{-1} = \text{diag}(M_1^{-1}, M_2^{-1}, \dots, M_N^{-1})$, $M_i^{-1} = \begin{bmatrix} m_i^{-1}I_3 & \Theta \\ \Theta & J_i^{-1}(\bar{X}_t) \end{bmatrix}$, $i = 1, \dots, N$ – матрица,

обратная к матрице масс.

Данная схема имеет линейный порядок аппроксимации по времени³ и является условно устойчивой. Однако для выбранного шага интегрирования Δt данная схема имеет преимущество по сравнению с явной схемой Эйлера, так как условие условной устойчивости предполагает возможность увеличить коэффициенты упругости α .

Коэффициенты упругости и коэффициенты демпфирования выбираются методом подбора на основе шага интегрирования Δt и типа шарнира. Данные коэффициенты зависят от компонентов матрицы масс, то есть от масс и компонентов тензоров инерции двух звеньев. Так как эта зависимость от компонентов тензоров инерции не существенна по сравнению с массами двух звеньев, то можно считать, что

$$\alpha_k = m_{eff} \alpha_k^*(\Delta t), \quad \beta_k = m_{eff} \beta_k^*(\Delta t), \quad m_{eff} = \frac{1}{\frac{1}{m_i} + \frac{1}{m_j}}, \quad k = 1, \dots, S; \quad i, j \in \{1, \dots, M\},$$

где m_{eff} – эффективная масса, которая является конечной величиной, если потребовать конечность массы хотя бы одного звена.

В качестве шага интегрирования возьмём $\Delta t \sim 3 \cdot 10^{-3}$ сек. Для формирования штрафных сил, ограничивающих поступательные степени свободы (3 степени свободы в сферическом, осевом и универсальном шарнире и 2 степени свободы в поступательном шарнире), приемлемым является выбор коэффициентов $\alpha_k^* = 5000$, $\beta_k^* = 25$. Для формирования штрафных моментов, ограничивающих вращательные степени свободы (2 степени свободы в осевом шарнире, 1 степень свободы в универсальном шарнире и 3 степени свободы в призматическом шарнире), приемлемым является выбор $\alpha_k^* = 10000$, $\beta_k^* = 10$.

При уменьшении шага интегрирования Δt можно увеличивать коэффициенты упругости, получая тем самым более точные результаты.

Данная работа выполняется при поддержке РФФИ, грант № 13-07-00708.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Vittenburg I. *Dynamica system tverdych tel.* Moskva, Mir, 1980, 292 s.
- [2] Philippov A.F. *Differencialnye uravnenia s razryvnoy pravoy chastyu.* Moskva, Nauka, 1985, 225 s.
- [3] Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennye metody.* Moskva, Nauka, 1989, 432 s.
- [4] Ahmed A. Shabana. *Computational Dynamics, Third edition,* John Wiley & Sons Inc., 2010.

Received June 10, 2013