

## САМООРГАНИЗАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ТРАНСПОРТНОЙ СИСТЕМЫ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНИХ ШУМОВ

**А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Москва, Россия

e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: <http://keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm>

**Ключевые слова:** Транспортные потоки, стохастические процессы, самоорганизация, мультипликативный шум, уравнение Фоккера-Планка, индуцированные шумом переходы.

**Аннотация.** В работе исследовано коллективное поведение стохастической транспортной системы города или его крупного района, проявляющееся в самоорганизации синхронизированного движения автомобилей (активных частиц), происходящей по принципам фазовых переходов. При этом спонтанный процесс самоорганизации хаотических транспортных потоков, обеспечивающий отклонение от оптимального режима движения, происходит под воздействием внешнего шума, обусловленного влиянием на условия движения автомобилей различных случайных факторов. Проанализированы отвечающие минимуму синергетического потенциала метастабильные упорядоченные состояния пространственно однородного транспортного потока в присутствии мультипликативного шума управляющего параметра.

## SELF-ORGANIZING OF STOCHASTIC TRANSPORT SYSTEM UNDER INFLUENCE OF EXTERNAL NOISE

**A.V. KOLESNICHENKO**

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science

e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: <http://keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm>

**Summary.** The collective behaviour of stochastic traffic system of a city or its large region is investigated. It is shown in self-organising of the synchronised motion of the active particles (cars) taking place on principles of phase transitions. Thus spontaneous process of self-organising of chaotic traffic flows (providing a diversion from an optimum mode of a motion) occurs under the influence of any the correlated noise which are caused by influence on traffic conditions of cars of various random factors. Stationary states of a spatially homogeneous traffic flows in the presence of noise of the driving parametre are analysed.

**2010 Mathematics Subject Classification:** 82C26, 82C31, 91B70.

**Key words and Phrases:** Traffic flows, Stochastic processes, Self-organising, Multiplicative noise, Noise-induced transitions

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данное исследование выполнено в рамках программы развития городской транспортной инфраструктуры, выработки новых методических и теоретических подходов к её моделированию, поиска новых инструментариев прогнозирования транспортной системы в целом с целью создания эффективных мер по управлению дорожными средствами.

Разумеется, в общем случае необходим комплексный подход к анализу сложной городской транспортной системы, возможность которого проявляется в комбинации различных способов её описания<sup>1</sup>. Существующие модели, предназначенные для анализа транспортных сетей, весьма разнообразны по кругу решаемых задач, применяемому математическому аппарату, используемым данным и степени детализации описания движения. В частности, в настоящее время разработаны и широко используются статистические модели равновесного распределения корреспонденций и распределения потоков по сети<sup>1-3</sup>, кинетические<sup>4-7</sup>, гидродинамические<sup>1,8-13</sup> и микроскопические модели транспортных сетей, в которых явно выписывается уравнение движения каждого автомобиля<sup>14-15</sup>. Все они носят, как правило, детерминистический характер и предназначены для определения текущих значений и прогноза различных характеристик функционирования трафика, таких как интенсивность движения на всех элементах транспортной сети, объёмы перевозок, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Вместе с тем, транспортная система города относится в общем случае к числу неравновесных стохастических динамических систем<sup>16-17</sup>, подверженных флуктуационному воздействию стохастических шумов, обусловленных влиянием на условия движения автомобилей различных случайных факторов (таких как, плохая видимость трассы, состояние дорожного покрытия, производимые ремонтные работы, метеорологические условия и т.п.). В результате этого, хаотическая система городского трафика с ростом интенсивности воздействия внешней среды, удаляющего её от оптимального стационарного состояния, может испытывать самоорганизацию<sup>i)</sup>, исследование которой возможно, в частности, на основе стохастических уравнений движения<sup>18</sup>. При этом её эволюция связана с периодами неустойчивости, сменяемыми метастабильными состояниями пространственно-временного распределения автомобилей, которые качественно отличаются от неупорядоченного (хаотического) их распределения на дорогах. В свою очередь эти новые коллективные образования (когерентные структуры) активных частиц (автомобилей) вновь могут изменяться непредсказуемым образом в зависимости от текущего состояния составляющих транспортную систему элементов и изменения внешних условий движения.

Заметим, что такого рода переходы от одной структуры (фазы) к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам в термодинамике и переходам, встречающимся в неравновесных физических системах при детерминированных внешних воздействиях, таким, как, например, *неустойчивость Бенара*, или лазерный пере-

---

<sup>i)</sup> Под понятием самоорганизации обычно подразумевается процесс образования пространственно-временных когерентных структур и их эволюция в более организованные формы в открытой динамической нелинейной системе за счёт согласованного взаимодействия множества элементов, её составляющих.

ход. В результате, в подобных системах с хаотической динамикой, находящихся в неравновесном состоянии, происходят процессы, приводящие к выделению из множества описывающих систему переменных небольшого числа параметров, к которым подстраиваются все прочие степени свободы. Другими словами эволюция самоорганизующейся системы характеризуется последовательностью мелкомасштабных неустойчивостей, взаимодействие которых приводит к долгоживущей коллективной моде, определяющей коллективное поведение всего ансамбля автомобилей. Исследование феноменологической картины процесса самоорганизации, представляющей фазовый переход, индуцированный шумом, удобно провести в рамках синергетического подхода. Согласно известной *теореме Рюэля-Такенса*<sup>19</sup>, нетривиальная картина самоорганизации, включающая в себя наличие странных аттракторов, наблюдается, если число выделенных степеней свободы не менее трёх.

В настоящей работе качественное исследование коллективного поведения транспортных потоков проведено в рамках популярной в теории самоорганизации системы уравнений Лоренца, три переменные которой имеют равноправный характер и описывают самосогласованное поведение трёх динамических параметров, которые согласно устоявшейся терминологии называются параметром порядка, сопряжённым полем и управляющим параметром соответственно. Как известно, впервые синергетическая модель Лоренца возникла из упрощения гидродинамических уравнений, описывающих тепловую конвекцию *Рэля-Бенара* в атмосфере и в настоящее время является классической моделью хаотической динамики. Дальнейшее исследование модели Лоренца, проведенное в целом ряде публикаций, показало, что она даёт вполне правдоподобную кинетическую картину коллективного поведения частиц в любой макроскопической динамической системе, в которой возможна актуализация потенциального порядка.

Как уже было отмечено, при спонтанном процессе самоорганизации хаотических транспортных потоков, обеспечивающем переходы в новые стабильные и метастабильные состояния, особая роль принадлежит воздействию стохастических внешних шумов. Наиболее естественным образом учёт этого фактора может быть достигнут в рамках модифицированной модели Лоренца, путём использования стохастических уравнений для её параметров (см., например,<sup>17</sup>), в частности, стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена<sup>ii)</sup> для управляющего параметра транспортного потока. Наличие шумового источника в этом уравнении обуславливает вариации структурных параметров транспортной сети. При этом можно предположить, что допустима замена реального шума, флуктуации которого обусловлены в общем случае кумулятивным действием многочисленных факторов, *гауссовским белым шумом*. Аргументом в пользу такого выбора случайной силы в СДУ может быть то обстоятельство, что только для модели белого шума результирующий стохастический процесс будет Марковским и только лишь такой выбор приводит к

ii) Заметим, что в рамках термодинамического подхода аналогичное детерминированное уравнение описывает переход неустойчивого транспортного потока (приводящего, в частности, к дорожным пробкам) в устойчивый поток, отвечающий оптимальному режиму движения. Этот переход представляется как неравновесный переход первого рода, отражающий детерминистическую сторону явления.

полной эквивалентности метода СДУ мощному методу уравнения Фоккера-Планка (УФП) для плотности вероятности перехода, которым мы далее воспользуемся. Таким образом, дополненное сингулярным источником шумов, уравнение для управляющего параметра в схеме Лоренца описывает в достаточной для качественного анализа степени стохастическую природу синхронизированного транспортного потока. При этом флуктуации управляющего параметра играют не только роль триггера, включающего возможный фазовый переход, но и являются причиной самосогласованного формирования новых метастабильных состояний, причем в зависимости от интенсивности шума управляющего параметра происходит нетривиальная перестройка синергетического поведения транспортной системы в целом, при которой точка перехода в устойчивое состояние сдвигается, уходя зачастую в режим, запрещенный при детерминированном способе моделирования<sup>20</sup>.

Кроме этого, в данной работе стационарное поведение хаотического транспортного потока моделируется в стохастическом пространстве параметра порядка *марковским диффузионным процессом*, являющимся решением УФП с *мультипликативным шумом*, т.е. шумом, зависящим от самого случайного процесса. Показано, что если интенсивность мультипликативного шума достаточно велика, то экстремумы функции распределения девиаций интервалов движения автомобилей, описывающей стационарное поведение синхронизированного транспортного потока, и по числу и по положению существенно отличаются от стационарных состояний, отвечающих соответствующему детерминированному случаю. Мультипликативный шум приводит к возникновению новых метастабильных стационарных состояний и, тем самым, изменяет и сами свойства локальной устойчивости детерминированного случая (в частности, *бифуркационные диаграммы*), описываемого классической системой Лоренца. Это качественное изменение наиболее отчетливо отражается в экстремумах стационарной плотности вероятности, которые, согласно Хорстхемке и Лефевру<sup>20</sup>, являются наиболее подходящими индикаторами перехода: экстремумы стационарной плотности вероятности соответствуют новым «фазам» системы. Таким образом, мультипликативный шум может, как стабилизировать неустойчивые макроскопические состояния в пространстве параметра порядка, так и вызывать неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного подхода.

Таким образом, основная цель работы состоит в исследовании влияния внешнего шума на синергетическое поведение хаотической системы городского автотранспорта, представленной стохастической схемой Лоренца. Использование этой модели позволяет найти область значений управляющего параметра, в которой сохраняется устойчивость транспортной системы с мультипликативными шумами. Проанализированы возникающие в результате самоорганизации транспортной системы метастабильные упорядоченные состояния, отвечающие минимуму синергетического потенциала, в котором система может находиться настолько долго, пока подвержена внешнему воздействию. Найдены стационарные решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка и положения минимумов плотности вероятности девиации интервалов движения в зави-

симости от интенсивности шума.

## 2. УРАВНЕНИЯ САМООРГАНИЗАЦИИ ДЛЯ ХАОТИЧЕСКИХ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Далее для коллективного поведения макроскопического описания хаотических транспортных потоков будем использовать синергетический подход, уподобляя (до известной степени) АТС взаимодействующим частицам жидкости, точнее, активным жидким частицам, поскольку в транспортных системах всегда косвенно присутствует человеческий фактор. При слабой загруженности автомагистрали водители движутся по дороге как им удобно (почти хаотическим образом). Когда дорога становится загруженной, автомобили вынуждены ехать только по своей полосе, следуя друг за другом со средней скоростью  $u_{cp}(t)$  и соблюдая интервал движения  $s(t)$ . Причем, в общем случае величины  $u_{cp}$  и  $S$  отличаются от возможных оптимальных значений: скорости  $U$  и интервала  $S = UT$  движения (здесь  $T$  – время пробега оптимального интервала). Именно подобный режим движения автомобилей, называемый «синхронизированным» потоком, более всего схож с движением жидкости. Заметим, что движение автомобилей на этой стадии происходит зачастую с частыми пробками (переходами к режиму «*stop-and-go*»), причем такое инертное состояние распространяется вверх и вниз по дороге, сохраняясь длительное время<sup>iii)</sup>. Вместе с тем, важно иметь в виду, что главной причиной перехода от режима свободного движения автомобилей к синхронизированному, а затем к затору в определенные моменты времени, когда трасса становится переполненной, могут явиться весьма незначительные помехи движению, препятствовавшие формированию оптимального транспортного потока. При этом переход от хаотического потока к синхронизированному может произойти почти спонтанно, например, около наклонных выездов на автомагистраль, когда происходит внезапное увеличение числа автомобилей на дороге.

Исследование самосогласованной картины формирования синхронизированных транспортных потоков будем проводить в рамках обобщенной модели Лоренца<sup>17</sup>. В данной работе будем предполагать для простоты, что транспортный поток пространственно однороден. Тогда задача сводится к конструированию уравнений, описывающих изменение во времени динамических переменных – параметра порядка  $q(t)$ , сопряженного ему параметра  $u(t)$  и управляющего параметра  $\mathcal{Q}(t)$ .

В качестве параметра порядка выберем величину отклонения реального интервала движения от оптимального значения (девиацию интервала)

---

<sup>iii)</sup> Рассмотренная в этой работе картина самоорганизации синхронизированных транспортных потоков отвечает непрерывному фазовому переходу, при котором параметр порядка плавно изменяется со временем. Синергетической картине прерывистого режима движения (*stick-slip regime*) автомобилей, при которой состояние покоя (при заторе) чередуется случайным образом с непрерывным движением автотранспорта, будет посвящена следующая работа автора.

$$q(t) \equiv s(t) - S, \quad (1)$$

в качестве сопряжённого поля – величину скорости изменения реального интервала движения  $ds(t)/dt$ , отсчитываемой от рассогласования  $U - u_{cp}(t)$  оптимальной и текущей скоростей:

$$u(t) \equiv ds(t)/dt - [U - u_{cp}(t)], \quad (2)$$

а под управляющим параметром транспортного потока  $\mathfrak{Q}$  будем понимать некоторую величину, определяемую условиями движения. В реальных условиях городского трафика эти переменные, представляющие эволюцию самоорганизующейся системы, испытывают флуктуации, действие которых представляются стохастическими источниками. В простейшем случае скорости изменения этих величин задаются следующей обобщенной системой Лоренца:

$$dq(t)/dt = -q(t)/\tau_q + u(t), \quad (3)$$

$$du(t)/dt = -u(t)/\tau_u + g_u q(t) \mathfrak{Q}(t), \quad (4)$$

$$d\mathfrak{Q}(t)/dt = [\mathfrak{Q}_0 - \mathfrak{Q}(t)] / \tau_{\mathfrak{Q}} - g_{\mathfrak{Q}} q(t) u(t) + \sqrt{2} \sigma_{\mathfrak{Q}} \xi(t), \quad (5)$$

дающей кинетическую картину коллективного поведения следующих друг за другом автомобилей. Здесь  $\tau_q$ ,  $\tau_u$  и  $\tau_{\mathfrak{Q}}$  – характерные времена автономной релаксации соответствующих величин к стационарным значениям  $q = u = 0$ ,  $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0$ ;  $g_u$ ,  $g_{\mathfrak{Q}}$  – положительные константы, являющиеся мерой обратной связи системы;  $\sigma_{\mathfrak{Q}}^2$  – интенсивность флуктуаций управляющего параметра ( $\sigma_{\mathfrak{Q}}$  – амплитуда шумов). При написании этих уравнений учтено, что в автономном режиме изменение указанных гидродинамических параметров транспортного потока имеет диссипативный характер, связанный с процессом дебаевской релаксации. Кроме этого, учтён принцип Ле-Шателье-Брауна: так как причиной самоорганизации является рост управляющего параметра  $\mathfrak{Q}(t)$ , то величины  $q(t)$  и  $u(t)$  должны изменяться таким образом, чтобы препятствовать росту  $\mathfrak{Q}(t)$ . С формальной точки зрения этот факт может быть отражен введением обратной связи между параметром порядка  $q(t)$  и сопряжённого поля  $u(t)$ . Помимо этого, принципиально важное значение имеет положительная обратная связь между параметром порядка  $q(t)$  и управляющим параметром  $\mathfrak{Q}(t)$ , приводящая к росту сопряжённого поля – именно наличие этой связи является причиной самоорганизации. При этом

особенностью стохастического кинетического уравнения для управляющего параметра является то, что релаксация величины  $\mathfrak{G}(t)$  происходит не до нуля, а до конечного значения  $\mathfrak{G}_0$  – параметра помех, препятствующих формированию оптимального транспортного потока. И, наконец, важная особенность обобщенной стохастической модели самоорганизующейся транспортной системы, отличающей её от классической модели Лоренца, состоит в наличии в уравнении (5) для управляющего параметра  $\mathfrak{G}(t)$  стохастического источника  $\xi(t)$  с интенсивностью  $\sigma_g^2$ , который определяется, в общем случае, *процессом Орнштейна-Уленбека*. Поскольку в движущемся потоке автомобилей ситуация, как правило, очень сложна, то флуктуации управляющего параметра не могут быть приписаны какой-нибудь вполне определённой причине. Эти флуктуации обусловлены, в общем случае, кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояния транспортной системы. Центральная предельная теорема теории вероятностей утверждает, что при любом распределении вероятностей этих факторов (если они не слишком отличаются друг от друга и не слишком сильно коррелированы) флуктуации управляющего параметра имеют нормальное распределение корреляционной функцией, в частности, дельтообразное (в случае, когда физическое время  $t$  изменения динамических переменных намного превышает время корреляции шумов), именуемое нормальным белым шумом<sup>iv)</sup> 21,22. Далее для простоты будем считать шумы *гауссовскими*, носящими  $\delta$ -коррелированный характер:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (6)$$

Как известно, особенностью любой синергетической системы является наличие иерархии характерных времен изменения мод, определяющих процесс самоорганизации<sup>21</sup>. Это обстоятельство выражается в *принципе адиабатического соподчинения*, согласно которому в ходе эволюции моды, обладающие малыми временами релаксации, успевают релаксировать к стационарным значениям, фиксируемым величиной гидродинамической моды, которой отвечает максимальный масштаб времени. В результате эволюция всей системы определяется изменением этой моды, а остальные моды можно исключить из рассмотрения. С феноменологической точки зрения именно амплитуда медленной моды представляет собой параметр порядка, определяющий коллективное поведение системы. Тогда *условия адиабатичности*  $\tau_q \gg \tau_u, \tau_g$ , которым мы далее будем следовать, дают возможность положить в уравнениях (4) и (5)

$$\tau_u du/dt = \tau_g d\mathfrak{G}/dt = 0,$$

что позволяет выразить сопряжённое поле и управляющий параметр через параметр порядка следующим образом:

---

<sup>iv)</sup> Введение идеализированного белого шума существенно упрощает все вычисления и во многих случаях позволяет получить правильный окончательный результат.

$$u(t) = A_u q(t) \left[ \mathfrak{D}_0 + \tau_g \sqrt{2} \sigma_g \xi(t) \right] / \left( 1 + \frac{q(t)^2}{q_m^2} \right), \quad (7)$$

$$\mathfrak{D}(t) = \mathfrak{D}_0 - A_\phi q(t) u(t) + \tau_g \sqrt{2} \sigma_g \xi(t), \quad (8)$$

Подставляя теперь (7) в (3), получим одномерное стохастическое дифференциальное уравнение для параметра порядка в форме Ито<sup>23</sup>

$$\tau_q \frac{dq(t)}{dt} = -q(t) \left[ 1 - \frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_c (1 + q^2(t)/q_m^2)} \right] + \frac{q(t) \tau_g}{\mathfrak{D}_c (1 + q^2(t)/q_m^2)} \sqrt{2} \sigma_g \xi(t). \quad (9)$$

В уравнениях (7)-(9) были использованы следующие обозначения

$$A_u \equiv g_u \tau_u, \quad A_g \equiv g_g \tau_g, \quad q_m^{-2} \equiv A_u A_g, \quad \mathfrak{D}_c^{-1} \equiv \tau_u g_u \tau_g.$$

Таким образом, поставленная задача состоит в исследовании влияния стохастического источника на эволюцию параметра порядка  $q(t)$ . Для анализа стохастического уравнения (9) удобно ввести безразмерные величины, измеряя время  $t$ , девиацию интервала  $q(t)$  и интенсивность шума  $\sigma_g$  в единицах  $\tau_q$ ,  $q_m$  и  $\mathfrak{D}_c \tau_g^{-1}$  соответственно. В результате уравнение (9) принимает следующий вид:

$$\frac{dq(t)}{dt} = -q(t) \left[ 1 - \frac{1}{1 + q^2(t)} \Theta \right] + \sigma_g g(q) \xi(t) \equiv f(q) + \sigma_g g(q) \xi(t), \quad (10)$$

где первое слагаемое описывает дрейф в пространстве стохастической переменной  $q(t)$ , а второе – диффузию. В уравнении (10) детерминистическая сила  $f(q, \Theta)$ , обеспечивающая скорость дрейфа, и синергетический потенциал  $V(q, \Theta)$  соответственно имеют вид:

$$f(q) \equiv -\frac{\partial V(q, \Theta)}{\partial q}, \quad V(q, \Theta) \equiv \frac{1}{2} \left[ q^2 - \Theta \ln(1 + q^2) \right], \quad \Theta \equiv \frac{\mathfrak{D}_0}{\mathfrak{D}_c}, \quad (11)$$

а для мультипликативной функции  $g(q)$  справедливо выражение

$$g(q) \equiv \sqrt{2} q (1 + q^2)^{-1}. \quad (12)$$



Данная модель эволюции удовлетворяет известному положению, согласно которому флуктуации управляющего параметра всегда приводят к появлению мультипликативного шума. Уместно отметить, что разложение синергетического потенциала  $V(q, \Theta)$  в ряд  $V(q, \Theta) \approx (1 - \Theta)q^2 / 2 + (\Theta / 4)q^4$  приводит стохастическое уравнение Ланжевена (10) к виду уравнения Гинзбурга-Ландау

$$\frac{dq(t)}{dt} = (\Theta - 1)q - \Theta q^3 + \sigma_g g(q) \xi(t),$$

дополненному мультипликативным шумом (12).

По поводу уравнения (10) следует отметить следующее: известно, что вполне удовлетворительное качественное описание сложных хаотических систем возможно при использовании только одного стохастического уравнения (типа (10)). Это связано с тем, что точные аналитические решения УФП удаётся получить, как известно, в основном для одномерных систем (см., например, <sup>16,17</sup>). Кроме этого, при исследовании индуцированных шумом переходов нежелательно использование приближенных методов решения системы стохастических уравнений, поскольку даже малые погрешности численного метода могут приводить к «ложной» качественной перестройке поведения хаотической среды.

Прежде чем приступить к анализу уравнения (10), рассмотрим простейший случай  $\sigma_g = 0$ , когда уравнения (3)-(5) сводятся к классической модели Лоренца, а уравнение Ланжевена (10) принимает детерминистическую форму уравнения Ландау-Халатникова

$$dq/dt = -q[1 - \Theta(1 + q^2)^{-1}] \equiv -\partial V / \partial q, \quad (13)$$

из которого следует, что

$$[q^2 - (\Theta - 1)]^\Theta / q^2 \propto \exp[-2(\Theta - 1)t].$$

Найдем неподвижные точки уравнения (13), описывающие состояния системы не меняющиеся во времени. Приравнивая производную динамической переменной  $q$  нулю, получим алгебраическое уравнение  $q[1 - \Theta(1 + q^2)^{-1}] = 0$ , имеющее три корня:  $q = 0$ ,  $q^\pm = \pm\sqrt{\Theta - 1}$ . Таким образом, при  $\Theta < 1$  имеется одно состояние равновесия, расположенное в начале координат, а при  $\Theta \geq 1$  – три состояния равновесия  $q = 0$ ,  $q^\pm = \pm\sqrt{\Theta - 1}$ . Синергетический потенциал (11) приобретает минимум в точках

$$q^{st} = \pm\sqrt{\Theta - 1}, \quad (14)$$

которые возможны только при больших значениях безразмерного параметра помех  $\Theta$ . Таким образом, в предкритической области  $\Theta < 1$  система релаксирует в неупорядоченное состояние  $q = 0$ , а в закритической  $\Theta > 1$  – в упорядоченные состояния (14).

В заключение этого подраздела заметим, что в рамках принятого адиабатического приближения модифицированная система Лоренца с аддитивным шумом в стохастическом уравнении для управляющего параметра  $\mathfrak{S}$  сводится к однопараметрическому стохастическому уравнению (10) с мультипликативным шумом для обладающего максимальным временем релаксации параметра порядка  $q(t)$ . Это обстоятельство обусловливает, в конечном счёте, нетривиальную перестройку синергетического поведения синхронизированной транспортной системы в целом в зависимости от интенсивности шума управляющего параметра.

### 3. СТАЦИОНАРНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА-ПЛАНКА

Набор случайных решений стохастического уравнения (10) определяется *уравнением Фоккера-Планка* (УФП). Эквивалентное уравнению Ланжевена (10) УФП, определяющее эволюцию одноточечной *функции распределения*  $P(q, t)$  девиации интервала движения автомобилей  $q(t)$ , может быть записано в виде уравнения непрерывности в пространстве стохастической переменной  $q(t)$ <sup>21-23</sup>

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = -\nabla J(q, t), \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial q}, \quad (15)$$

где поток

$$J(q, t) \equiv f(q)P(q, t) + (\sigma_9^2 / 2)\nabla(g^2(q)P(q, t)) \quad (16)$$

интерпретируется, как поток вероятности, содержащий дрейфовую (первое слагаемое) и диффузионную (второе слагаемое) части. Величина  $D(q) \equiv (\sigma_9^2 / 2)g^2(q)$  представляет собой обобщённый коэффициент диффузии. Напомним, что для аддитивного шума мультипликативная функция  $g^2(q) \equiv \sqrt{2}$  и коэффициент  $D$  сводится к интенсивности флуктуаций управляющего параметра  $\sigma_9^2$  (интенсивности шума).

Очевидно, что любая транспортная система, испытывающая воздействие шума, по истечении достаточно большого интервала времени  $t \rightarrow \infty$  выходит на некоторый стационарный режим. Стационарное поведение в данном случае означает, в системе устанавливается плотность вероятности  $P^{st}(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(q, t)$ , форма которой не изменяется со временем. Тогда обобщённый поток принимает постоянное значение:

$$J(q) \equiv f(q)P^{st}(q) + \frac{\sigma_g^2}{2} \nabla (g^2(q)P^{st}(q)) = const. \quad (17)$$

Для равновесных систем  $J = 0$  и решение уравнения (17) имеет вид [1]

$$P^{st}(q) = Z^{-1} g^{-2}(q) \exp \left( \frac{2}{\sigma_g^2} \int^q \frac{f(q')}{g^2(q')} dq' \right), \quad (18)$$

где постоянная  $Z$  задаётся условием нормировки  $\int P(q') dq'$ . Для дальнейших целей равновесное распределение (18) удобно записать в квазигиббсовском виде с эффективным (так называемым вероятностным) потенциалом  $V_{ef}(q)$

$$P^{st}(q) = Z^{-1} \exp \left( -\frac{V_{ef}(q)}{\sigma_g^2} \right), \quad V_{ef}(q) = \sigma_g^2 \ln g^2(q) + 2 \int \frac{\partial V / \partial q'}{g^2(q')} dq'. \quad (19)$$

Комбинируя формулы (11), (12) и (19) можно найти явный вид вероятностного потенциала  $V_{ef}(\varepsilon)$  для рассматриваемой здесь системы, который с точностью до константы имеет вид:

$$V_{ef}(q) = \frac{q^4}{4} + \left( 1 - \frac{\Theta}{2} \right) q^2 + (1 - \Theta + 2\sigma_g^2) \ln q - 2\sigma_g^2 \ln(1 + q^2). \quad (20)$$

Экстремумы функции  $P^{st}(q)$  определяются из условия

$$h(q_{ext}, \sigma_g) \equiv f(q_{ext}) - \frac{\sigma_g^2}{2} g(q_{ext}) \frac{\partial g(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_{ext}} = 0, \quad (21)$$

являющегося основным уравнением при анализе влияния мультипликативного шума на стационарное поведение стохастической системы<sup>20</sup>. Стационарная плотность вероятности имеет максимум при  $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{ext}} < 0$  и минимум при  $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{ext}} > 0$ .

Множество точек в пространстве конфигураций для которых  $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{ext}} = 0$ , соответствует структурно-неустойчивым ситуациям (которые называют  $P$ -бифуркациями). Благодаря  $P$ -бифуркациям нарушается соответствие между аттракторами детерминированной системы и максимумами стационарной плотности вероятности. Если величина  $\sigma_g^2$  мала, то корни уравнения (21) ни по числу, ни по

положению не отличаются от рассмотренных выше детерминированных стационарных состояний. Но если интенсивность  $\sigma_9^2$  шума достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности  $P^{st}(q)$  и по числу и по положению могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния. А это означает, что (в отличие от аддитивного шума) мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему, но может также стабилизировать новые макроскопические состояния и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного случая.

Важно отметить, что стационарными состояниями принято считать не зависящие от времени решения  $q^{st}$  детерминированного уравнения (13). Вместе с тем слова «стационарное состояние» можно употреблять и по отношению к распределению по возможным состояниям. Так, распределение (19) можно назвать *стационарным распределением состояний*. В случае аддитивного шума хаоса не существует различия между детерминированным стационарным состоянием  $q^{st}$  и экстремумами  $q_{ext}$  стационарного распределения  $P^{st}(q)$ , хотя и надо иметь в виду, что система в стационарном состоянии на самом деле флуктуирует около некоторого среднего состояния. В случае мультипликативного шума случайная величина, определяющая стационарное состояние системы, качественно весьма отличается от вырожденной случайной величины, соответствующей детерминированному случаю.

#### 4. САМОСОГЛАСОВАННАЯ КАРТИНА ФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПОТОКОВ

Используя условие (21), легко получить уравнение

$$h(q_{ext}, \sigma_9) = (1 + q_{ext}^2)^3 - \Theta(1 + q_{ext}^2)^2 - 2\sigma_9^2(1 + q_{ext}^2) + 4\sigma_9^2 = 0, \quad (22)$$

определяющее положения экстремальных точек стационарного распределения (20). Они определяются величиной параметра помех  $\Theta$  и интенсивностью флуктуаций управляющего параметра  $\sigma_9^2$ .

Проанализируем решения этого уравнения в зависимости от значений параметров  $\Theta$  и  $\sigma_9^2$ . Так, максимум в точке  $q_{ext} = 0$ , отвечающий состоянию покоя, реализуется, если параметр помех  $\Theta$  не превышает критическое значение

$$\Theta_c = 1 + 2\sigma_9^2, \quad (23)$$

которое, возрастая с увеличением интенсивности флуктуаций  $\sigma_9^2$  управляющего параметра, ограничивает сверху область существования нулевого корня уравнения (22).

Кроме него существуют решения  $q_{ext\pm}$ , отвечающие несимметричной фазе. Исключая корень  $q_{ext}^2 = 0$ , получаем для них биквадратное уравнение

$$q^4 + (3 - \Theta)q^2 - (2\Theta + 2\sigma_9^2 - 3) = 0, \quad (24)$$

имеющее решения

$$q_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(\Theta - 3)^2 + 4(2\Theta + 2\sigma_9^2 - 3)} \right]. \quad (25)$$

Минимальная величина

$$q_e^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(\Theta + 7)(\Theta - 1)} \right] \quad (26)$$

этого решения достигается на прямой (23). При значениях параметра помех, удовлетворяющих неравенству  $\Theta < 4/3$ , корни  $\pm q_{ext}$  комплексны, в точке  $\Theta = 4/3$  они обращаются в нуль, а с их ростом до значений  $\Theta > 4/3$  становятся действительными, причём  $q_{ext+} = -q_{ext-}$ . Таким образом, *трикритическая точка*

$$\Theta = 4/3, \quad \sigma_9^2 = 1/6 \quad (27)$$

определяет границу появления корней  $q_{ext\pm} \neq 0$  уравнения (22), соответствующих несимметричной фазе. При выполнении условия (23) корень  $q_{ext} = 0$  отвечает минимуму потенциала (20) при  $\Theta < 4/3$ , тогда как при  $\Theta > 4/3$  он отвечает максимуму, а корни  $q_{ext\pm}$  отвечают симметричным минимумам.

Найдём теперь условие существования корней  $q_{ext\pm}$ . Приравнивая к нулю дискриминант уравнения (22), приходим к равенствам

$$\sigma_9^2 = 0, \quad \sigma_9^4 - \sigma_9^2 \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right] + \Theta^3/2 = 0, \quad (28)$$

второе из которых приводит к функциональной зависимости

$$2\sigma_9^2 = \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right] \pm \left\{ \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right]^2 - 2\Theta^3 \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

Эта функция отвечает куполообразной кривой  $\Theta(\sigma_9)$ , пересекающей ось абсцисс в точках  $\sigma_9 = 0$  и  $\sigma_9 = \sqrt{13.5}$ , и имеет максимум в точке

$$\Theta = 2, \sigma_9 = \sqrt{2}. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что данная кривая касается прямой  $\Theta_c = 1 + 2\sigma_9^2$  (23) в точке  $\Theta = 4/3, \sigma_9^2 = 1/6$ .

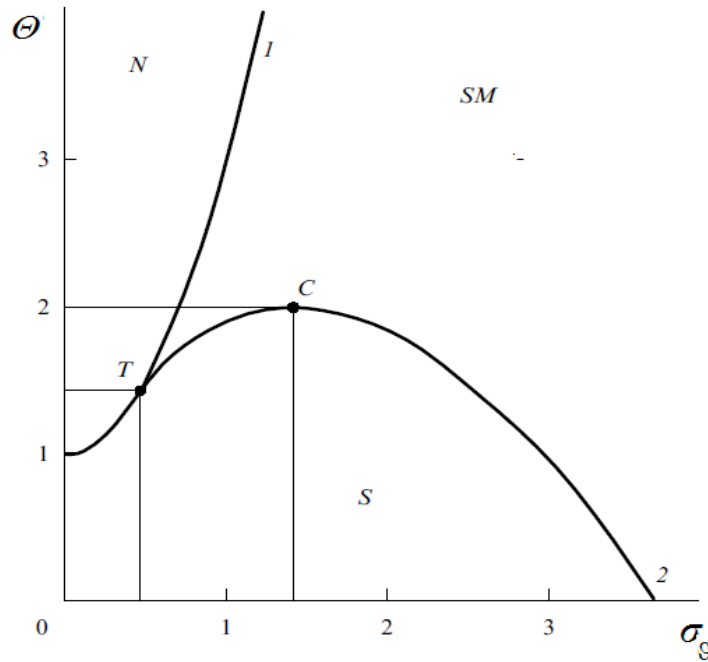


Рис.1. Фазовая диаграмма возможных режимов стационарного поведения транспортной системы с шумом  $\sigma_9$  управляющего параметра. Кривые 1,2 отвечают равенствам (23), (29),  $S$  – область устойчивой симметричной фазы,  $N$  – несимметричной,  $SM$  – устойчивой симметричной и метастабильной несимметричной фаз,  $T$  – трикритическая точка,  $C$  – критическая.

Приведенный анализ позволяет построить фазовую диаграмму возможных режимов поведения транспортной системы в условиях шума управляющего параметра (Рис.1). Здесь область  $S$  ниже кривой 2, задаваемой равенством (29), отвечает стабильной симметричной фазе, а область  $N$  ( $q = 0$ ) выше кривой 1, отвечающей (23) – несимметричной фазе ( $q_{\pm} \neq 0$ ). Область  $SM$ , заключённая между кривыми 1,2 соответствует сосуществованию устойчивой симметричной фазы и метастабильной несимметричной фазы. Точка  $T$  пересечения кривых 1,2, положение которой определяется равенствами (27), являются трикритической, а точка  $C$  с координатами (30) – критической. Бифуркационные диаграммы на Рис.2 показывают поведение стационарных состояний системы в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_9$  при фиксированных значениях параметра помех  $\Theta$ . Видно, что на границе области  $S$  (при  $\sigma_9^2 > 1/6$ ) происходит скач-

кообразное появление двух экстремальных точек потенциала (20), одна из которых отвечает неустойчивому состоянию  $q_u$ , а вторая – метастабильному  $q_m$

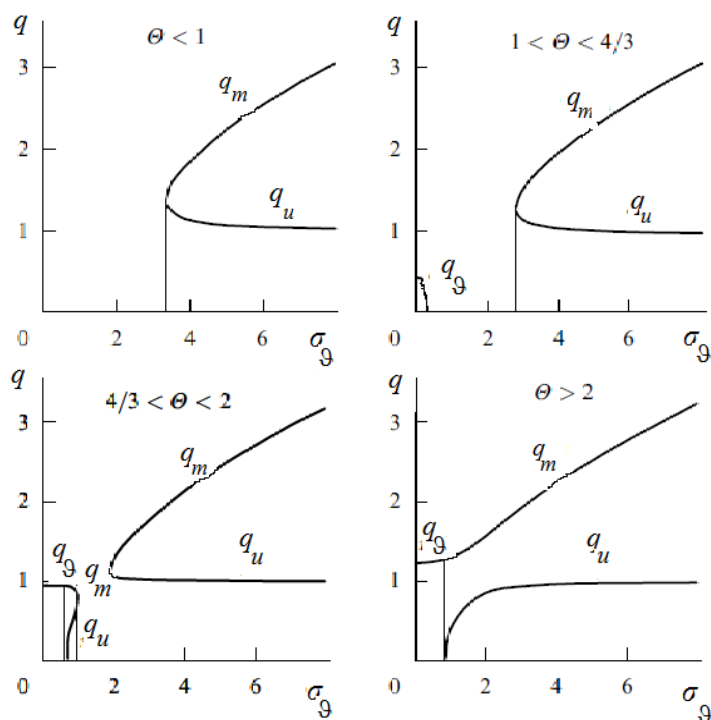


Рис.2. Бифуркационные диаграммы для стационарных значений параметра порядка  $q$  в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_9$  управляющего параметра и параметра помех, препятствующих формированию оптимального транспортного потока (здесь  $q_\theta$  – устойчивое,  $q_m$  – метастабильное,  $q_u$  – неустойчивое решение).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поскольку в современных условиях задача прогноза эволюции транспортной инфраструктуры города приобретает первостепенное значение, то моделирование коллективного поведения различных транспортных средств, выполненное с целью принятия эффективных мер по управлению движением транспортного потока, представляет определённый интерес. В настоящее время отсутствует общепринятый подход, описывающий поведение АТС в области «синхронизированного потока», т.е. проблема образования предзаторных и заторных ситуаций все ещё до конца не изучена. По этой причине при выработке стратегии управления АТС на основе разнообразных математических моделей дорожного движения целесообразно принимать во внимание также и синергетические модели эволюции хаотических транспортных потоков, которые моделируются стохастической динамической системой активных частиц, находящейся под влиянием разнообразных внешних шумов.

В работе в рамках синергетического подхода (на основе обобщённой стохастической схемы Лоренца) проведено моделирование эволюции пространственно однородных транспортных потоков, подверженных влиянию различных шумов. Показано, что включение аддитивного шума в уравнение для управляющего параметра, приводит в адиабатическом приближении к трансформации этих шумов в мультипликативные шумы для параметра порядка. Это обстоятельство способствует нетривиальной перестройке коллективного поведения автомобилей транспортной системы, испытывающей индуцированные шумом «фазовые переходы». Подобные переходы, обусловленные нарастанием интенсивности флуктуаций управляющего параметра, приводят к качественным изменениям самого вида стационарных значений функции распределения девиации интервалов движения автотранспорта. Учёт множества стационарных состояний этого распределения, в которых имеет место отклонение от оптимального режима движения, представляется в высшей степени важным при принятии стратегических решений по управлению движением транспортных потоков.

## REFERENCES

- [1] A.V. Gasnikov, S.L. Clenov, E.A. Nurminskii, Ia.A. Holodov, N.B. Shamrai, *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportnykh potokov*. Pod red. A.V. Gasnikova i dr, M.: MTCNMO, 2-e izd, (2013).
- [2] Wilson A.J., “Entropy maximizing models in the theory of trip distributions, mode split and route split”, *J. Transp. Econ. Policy*, **3**, 108-126 (1969).
- [3] Wilson A.J. “A statistical theory of spatial distribution models”, *Transportation research* **1**, (3), 253-269 (1967).
- [4] Prigogine I. and Andrews F.C., “Boltzman-like approach for traffic flow”, *Operations Research*, **8** (6), 789-797 (1960).
- [5] Prigogine I., Resibois P., “On a Generalized Boltzmann-like Approach for Traffic Flow”, *Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg.*, **48** (9), 805-814 (1962).
- [6] Prigogine I., Herman R., *Kinetic theory of vehicular traffic*, American Elsevier, New York, (1971).
- [7] Paveri-Fontana S.L., “On Boltzmann-like treatments for traffic flow: A critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis”, *Transportation Research*, **9**(4), 225-235 (1975).
- [8] Lighthill M.G., Whitham G. B., “On kinetic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **229**(1178), 317-345 (1955).
- [9] Helbing D., “Improved fluid–dynamic model for vehicular traffic”, *Phys. Rev. E.*, **51**, 3163-3169 (1995).
- [10] Karamzin Yu. N., Trapesdnikova M.A., Chetveryshkin B.N., Chiurbanova N.G., “Dvymernaia model' avtomobil'nykh potokov”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **18**(6), 85-95 (2006).
- [11] Sykhinova A. B., Trapesdnikova M.A., Chetveryshkin B.N., Chiurbanova N.G., “Dvymernaia makroskopicheskaia model' transportnykh potokov”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **21**(2), 118-126 (2009).
- [12] Chetveryshkin B.N., Trapesdnikova M.A., Fyrmanov I.R., Chiurbanova N.G., “Makro-i mikroskopicheskie modeli dlia opisaniia dvizheniia avtotransporta na mnogopolostnykh magistrali-akh”, *Trydi MFTI*, **2**(4), 163 (2010).
- [13] Richards P. L., “Shock waves on the highway”, *Operations Research*, **4**(1), 42-51 (1956).
- [14] Payne H.J., “Models of Freeway Traffic and Control: Berkeley G.A.”, *Mathematical Models of Public Systems*, **1**, 51-61 (1971).



- [15] Treiber M., Hennecke A., Helbing D., “Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulation”, *Phys. Rev. E*, **62**, 1805-1824 (2000).
- [16] Anishchenko V.S., Astakhov V.V., Vadivasova T.E., Neiman A.B., Strelkova G I., Shimanskii-Gaiier L., *Nelineiinye efekty v khaoticheskikh i stokhasticheskikh sistemakh*, Izhevsk: Institut komp’iuternykh issledovaniiii, (2003).
- [17] Olemckii A.I., *Sinergetika slozhnykh system: Femenologiya i statisticheskaia teoriia*, M. KRASAND, (2009).
- [18] Helbing D., “Traffic and related self-driven many particle systems”, *Reviews of modern physics*, **73** (4), 1067-1141 (2001); arXiv:cond-mat/0012229.
- [19] Ruelle D, Takens F., “On the nature of turbulence”, *Commun. Math. Phys.*, **20**, 167-192 (1971).
- [20] Horsthemke W., Lefever R., *Noise Induced Transitions*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, (1984).
- [21] Olemckii A.I., Kharchenko D.O., *Samoorganizatsiia samopodobnykh stokhasticheskikh system*, Izhevsk: Institut komp’iuternykh issledovaniiii, (2007).
- [22] Gardiner K.V., *Stokhasticheskie zadachi v estestvennykh naykakh*, M.: Mir, (1986).
- [23] Tikhonov V.I., Mironov M.A., *Markovskie protsessy*, M.: Sovetskoe radio, (1977).

*The results were presented at the thirteenth international seminar "Mathematical models & modeling in laser-plasma processes & advanced science technologies" (May 30 - June 6, 2015, Petrovac, Montenegro).*