ВЫВОД КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АВТОТРАНСПОРТНЫХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ФОРМАЛИЗМА НЕАДДИТИВНОЙ СТАТИСТИКИ

А.В. КОЛЕСНИЧЕНКО*, Б.Н.ЧЕТВЕРУШКИН**

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http: keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

**Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
Москва, Россия
e-mail: office@keldysh.ru, web page: http: keldysh.ru/chetverushkin/person.htm

Ключевые слова: энтропия Тсаллиса, неаддитивная статистика, энтропийные методы моделирования сложных систем, транспортные модели.

Аннотация. На основе формализма неэкстенсивной статистики Тсаллиса дан вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений, базирующихся на обобщённом кинетическом уравнении БГК. Эти уравнения предназначены, в частности, для построения адекватных макроскопических и мезоскопических моделей автотранспортных систем, относящихся к числу сложных систем, для которых фазовое пространство скоростей обладает фрактальной структурой. Получаемые при таком подходе модифицированные термическое и калорическое уравнения состояния, а также коэффициенты переноса содержат два дополнительных свободных параметра − параметр неаддитивности системы и фрактальную размерность фазового пространства, которые должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных. Это позволяет при математическом описании транспортных систем более свободно и обоснованно моделировать в рамках гидродинамического подхода реально складывающуюся дорожно-транспортную обстановку.

DERIVATION OF QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS FOR MOTOR TRANSPORT SYSTEMS BASED ON THE FORMALISM OF NONADDITIVE STATISTICS

A.V. KOLESNICHENKO*, B.N. CHETVERUSHKIN**

*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
e-mail: kolesn@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/kolesnichenko/person.htm

**Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science
e-mail: office@keldysh.ru, web page: http:.keldysh.ru/chetverushkin/person.htm

2010 Mathematics Subject Classification: 80A20, 82B30, 82C40.
Key words and Phrases: Entropy Tsallis, Nonadditive statistics, Entropy modeling of complex systems, Transport models

Summary. Applying the formalism of the Tsallis nonadditive statistical mechanics, a derivation of hydrodynamic and quasi-hydrodynamic equations is considered based on the generalized BGK kinetic equation. In particular, those equations are intended for construction of more appropriate macroscopic and mesoscopic models of transport systems related to the so-called anomalous systems where the corresponding phase space possesses a complicated (fractal) structure. The application of the approach developed in this paper does not change the structure of hydrodynamic and quasihydrodynamic equations, but the modified thermal and calorific state equations and also the transfer coefficients contain two additional free parameters, which are the parameter of the non-additivity of the system and the fractional dimension of the phase space. These parameters can be determined empirically in each particular case from statistical or experimental data, which allows us to simulate the actual variable traffic situation within a continual approach both in regular and crisis cases.

1. ВВЕДЕНИЕ

По аналогии с газовой динамикой И. Пригожин (при участии Ф. Эндрюса и Р. Хермана) полвека назад предложил описывать автотранспортные потоки обобщённым кинетическим уравнением Больцмана, в котором, однако, вместо интеграла столкновений частиц газа фигурирует «интеграл взаимодействия автомобилей»[1-5]. Из обобщенного кинетического уравнения Пригожина для функции распределения автомобилей могут быть получены макроскопические уравнения (гидродинамического типа) для транспортных потоков точно так же, как и уравнения Навье-Стокса в классической кинетической теории газов, т.е. путём осреднения его с аддитивными инвариантами по фазовому пространству скоростей. При этом в определённых условиях справедливо приближение «сплошной среды», когда транспортные потоки могут рассматриваться как потоки сжимаемой жидкости с мотивацией. Этот подход, существенно уточнённый и улучшенный в работах С. Павери-Фонтана[6], Д. Хельбинга[7] и некоторых других авторов[8,9] получил в настоящее время широкое применение в прикладных расчётах.

Наряду с этим, достаточно эффективными при описании движения автотранспортных потоков на улицах больших городов и многополосных магистралях (когда, в частности, все водители вынуждены придерживаться одинаковой стратегии поведения и подчиняться общим правилам) показали себя так называемые «квазигидродинамические модели» движения автотранспорта в области синхронизированных потоков[10-12]. Эти модели, являясь промежуточными (мезоскопическими) между кинетическими и чисто гидродинамическими моделями, основаны на системе квазигидродинамических уравнений (КГД)[13-16], исходящей в свою очередь из модифицированного кинетического уравнения Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК). Следует отметить, что принципиальным отличием всех квазигидродинамических моделей, расширяющим возможности моделей типа Навье-Стокса, является то, что они содержат дополнительные диссипативные слагаемые, имеющие вид вторых пространственных производных, которые при численном моделировании проявляют себя как эффективные регуляризаторы решения[13]. В случае транспортной модели эти слагаемые (пропорциональные некоторым малым параметрам, связанным с характерными временами пересечения в разных направлениях некоторой точки магистрали несколькими автомобилями), сглаживая решение вдоль и поперёк трассы, позволяют при использовании явных схем построить довольно эффективные конечно-разностные алгоритмы расчёта нестационарных автотранспортных потоков[16].

Вместе с тем важно ясно себе представлять, что вышеупомянутые кинетические и квазигидродинамические модели для транспортных потоков базируются на классической статистике Больцмана-Гиббса[17], в основе которой лежит предположение о полном перемешивании потока «фазовых точек» в фазовом пространстве скоростей (гипотеза молекулярного хаоса). Это означает, что любой выделенный объём приобретает по истечении времени $t \to \infty$ настолько хорошо развитую хаотическую структуру, что его точки могут располагаться в любой конечной части фазового пространства. Таким образом, фазовое пространство в классической статистике не содержит запрещённых состояний и обладает обычными свойствами непрерывности, гладкости, евклидовости. При этом стохастический процесс имеет марковский характер, а гипотеза перемешивания, дополненная предположением о бесконечном числе степеней свободы, приводит к каноническому (экспоненциальному) распределению вероятности состояний Больцмана-Гиббса (из которого следует, в частности, свойство аддитивности экстенсивных термодинамических переменных − внутренней энергии, энтропии и т.п.), или, в случае кинетической теории, к максвелловскому распределению скоростей.

Однако в общем случае система городского автотранспорта относится к числу систем, проявляющих более сложное (неаддитивное) поведение. Для этой системы зачастую характерна относительно слабая хаотизация фазового пространства скоростей, при которой экспоненциально быстрое перемешивание приобретает другой (во многих случаях степенной) характер, когда её поведение определяется практически недостижимыми состояниями (в силу ограничения автомобилей по скоростям, связанному с конкретной улично-дорожной сетью), которые характеризуются аномально малыми вероятностями заполнения, т.е. существенным свойством системы является произвольный конечномерный характер фазового пространства. В результате этого оказывается, что достаточно малого изменения внешнего или внутреннего воздействия (сложных погодных условий, наличия «узких мест», связанных, например, с вертикальными и горизонтальными искривлениями дороги, тоннелями, автоавариями и т.п.), чтобы коренным образом изменить поведение системы, в частности, чтобы возникла глобальная заторная ситуация. Кроме этого, наиболее реалистичной модели передвижения автотранспортных средств (АТС) должны быть присущи некоторые специфические свойства: анизотропия (неэквивалентность движения АТС вдоль и поперёк дороги), мультифрактальные граничные и начальные условия (распределение АТС на трассе), эффекты дальнодействия (так называемая «дальнозоркость» водителей – наличие конечных пунктов, поглощающих или порождающих транспортные потоки) и памяти (изначально существующая стратегия поведение АТС на дороге – так называемые *поведенческие принципы Вардропа* пользователей транспортной сети), приводящие к нарушению гипотезы полного хаоса. Другими словами, транспортная система принадлежит к так называемым сложным (аномальным) системам[18], для которых в общем случае наблюдается сильное взаимодействие между отдельными её частями, немарковость динамических процессов, что приводит, в конечном счёте, к нарушению «термодинамической» аддитивности. Именно в силу перечисленных причин её описание на основе классической статистики Гиббса-Больцмана не является во многих случаях вполне адекватным.

Как известно, статистическая теория сложных систем, обладающих произвольным фазовым пространством, в настоящее время наиболее полно развита для систем с определённым распределением запрещённых состояний в фазовом пространстве − а именно, для самоподобных систем, когда разброс вероятности имеет одинаковую форму на разных масштабах[18]. Такой теорией является неаддитивная (неэкстенсивная) статистическая механика (термодинамика) Тсаллиса[19,20], предназначенная для описания поведения сложных систем (систем с фрактальным характером фазового пространства, с длиной памятью, с сильными корреляциями между отдельными её частями), статистика которых допускает события, практически недостижимые в классических системах[i)]. Применение статистики Тсаллиса выглядит вполне обоснованным при изучении эволюции сложных социальных сетей − систем, состоящих из большого числа объектов (узлов), которые определённым образом взаимодействуют друг с другом, когда каждый элемент сети может взаимодействовать не только с несколькими ближайшими соседями, но и со многими удалёнными объектами, число которых, к тому же, может меняться со временем.

Хотя основы статистической теории неаддитивных систем были заложены К. Тсаллисом ещё 1988 году[19] и последующие многочисленные исследования зарубежными авторами коллективного поведения термодинамически аномальных систем представляют значительный общетеоретический интерес, в отечественной литературе по неизвестным причинам этот раздел статистической механики пока не нашёл широкого распространения и для большинства исследователей остаётся все ещё экзотикой. Вместе с тем возникают многочисленные новые математические проблемы статистической теории сложных систем, требующие своего решения. Среди них важным, по мнению авторов, является гидродинамический подход к моделированию транспортных систем, когда фазовое пространство скоростей обладает фрактальной структурой[21].

Кинетическому выводу обобщённых гидродинамических и квазигидродинамических уравнений в рамках формализма деформированной статистики Тсаллиса и посвящена данная работа. На основе подобных уравнений, возможно построить наиболее адекватные гидродинамические и мезоскопические модели движения АТС, в которых транспортный поток уподобляется сжимаемой жидкости с мотивацией, учитываемой, в частности, через модифицированные коэффициенты переноса и усложнённые уравнения состояния.

2. БАЗОВЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФОРМАЛИЗМА ДЕФОРМИРОВАННОЙ СТАТИСТИКИ ТСАЛЛИСА

Напомним вначале некоторые ключевые понятия статистики (термодинамики) Тсаллиса, которые будут использованы далее при выводе гидродинамических и квазигидродинамических уравнений. Деформированная статистическая механика сложных систем, подобно статистике простых физических систем, имеет дело с вероятностными закономерностями, характеризующими систему большого числа «частиц» (ведущих себя случайным образом объектов, обладающих внутренней энергией) и проявляющимися в

[i)] Заметим, что элементы ещё более общей функционально деформированной статистики, основанной на деформировании фазового пространства, объём которого изменяется согласно заданной функциональной зависимости, можно найти, например, в монографии[18].

«термодинамически» равновесных и неравновесных состояниях. Наиболее важное проявление подобных закономерностей в системе дискретных частиц состоит в их распределении по различным состояниям i, которые характеризуются дискретным распределением f_i. В работе[19] К. Тсаллис предложил для сложных статистических систем обобщить классическую формулу Больцмана-Гиббса-Шеннона для энтропии

$$S_{\mathrm{B}} = -\mathrm{k}_{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{W} f_i \ln f_i , \tag{1}$$

(где k_{B} − постоянная Больцмана; W − статистический вес, определяющий число дискретных состояний i) определением

$$S_q = \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{B}}}{q-1} \sum_{i=1}^{W} f_i (1 - f_i^{q-1}) , \qquad (\sum_{i=1}^{W} f_i = 1), \tag{2}$$

где энтропийный индекс (параметр деформации) q представляет собой вещественное число, принадлежащее интервалу $(0,\infty]$. Такая деформация логарифмической функции энтропии позволяет объяснить важную особенность поведения сложных систем (термодинамически аномальных систем с длинной памятью и/или дальнодействующими взаимодействиями), когда вероятность реализации больших значений энергии состояний убывает (при $q > 1$) не экспоненциально быстро, а степенным образом[ii)]. Благодаря этому статистика Тсаллиса может описывать события, практически недостижимые в простых системах. Легко показать, что в пределе $q \to 1$ (в пределе слабой связи) *энтропия Тсаллиса* (2) переходит в стандартную формулу Больцмана-Гиббса-Шеннона. Действительно, в пределе $q \to 1$ имеем: $f_i^{q-1} = \exp\left\{ (q-1)\ln f_i \right\} \to 1 + (q-1)\ln f_i$ и энтропия S_q сводится к форме

$$S_1 = \lim_{q\to 1} \frac{\mathrm{k}_{\mathrm{B}}}{q-1} \sum_{i=1}^{W} f_i (1 - f_i^{q-1}) = -\mathrm{k}_{\mathrm{B}} \sum_{i=1}^{W} f_i \ln f_i = S_{\mathrm{B}} . \tag{3}$$

Характерной особенностью энтропии Тсаллиса является её неаддитивный характер

$$S_q(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = S_q(\mathrm{A}) + S_q(\mathrm{B}) + \frac{1-q}{\mathrm{k}_{\mathrm{B}}} S_q(\mathrm{A}) S_q(\mathrm{B}) , \tag{4}$$

[ii)] Например, для полностью развитой турбулентности спектральное распределение энергии, отвечающее «закону пяти третей» $E(k) = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$, спадает при больших волновых числах k по степенному закону. По этой причине применение статистики Тсаллиса к этому распределению оказалось вполне успешным[22-23].

где A и B – две независимые подсистемы, для которых полная вероятность составной системы $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ подчиняется условию мультипликативности $f_{ij}(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) = f_i(\mathsf{A}) f_j(\mathsf{B})$. Его подстановка в формулу $\sum_i f_i^q = 1 + S_q(1-q)/\mathrm{k_B}$ даёт связь (4). Таким образом, параметр q – это *мера неаддитивности* системы, характеризующая целый класс различных термодинамик, соответствующих тем или иным термодинамически аномальным системам. *Согласно гипотезе Тсаллиса этот параметр характеризует некоторые дополнительные степени свободы, присущие сложным системам, и должен определяться в каждом конкретном случае*. Величина q ничем не ограничена и может принимать значения от нуля до плюс бесконечности, однако некоторые ограничения (как мы увидим далее) могут возникнуть в той или иной конкретной задаче; случаи $q < 1$, $q = 1$ и $q > 1$ соответственно соотносятся с супераддитивностью, аддитивностью и субаддитивностью системы.

Взвешенное среднее значение $\mathbf{E}_q(\phi) \equiv \langle \phi \rangle_q$ (по различным вероятностям реализации статистических состояний i) дискретной случайной физической величины ϕ_i в статистике Курадо-Тсаллиса[20], которой мы далее воспользуемся, определяется формулой

$$\langle \phi \rangle_q = \sum_{i=1}^{W} \phi_i f_i^q , \tag{5}$$

которая при $q = 1$ отвечает стандартному определению среднего значения.

Заметим, что q-энтропия может быть представлена в «классической форме»

$$S_q = -\mathrm{k_B} \sum_{i=1}^{W} f_i^q \ln_q f_i , \tag{6}$$

если использовать так называемый *деформированный логарифм*

$$\ln_q x \equiv (x^{1-q} - 1)/(1-q), \quad (\ln_1 x = \ln x), \tag{7}$$

обратная функция к которому представляет собой *экспоненту Тсаллиса*

$$\exp_q x \equiv [1 + (1-q)x]_+^{1/(1-q)}, \quad (\exp_1 x = \exp x); \tag{8}$$

(здесь выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+ \equiv \max(y, 0)$; при этом имеет место равенство $\exp_q \ln_q x = \ln_q \exp_q x = x$). Тогда энтропия Тсаллиса S_q, будучи мерой беспорядка сложной статистической системы, представляет среднее по статистическому ансамблю микроскопической q-энтропии $s_q(f_i)$, определяемой выражением $s_q(f_i) = \mathrm{k_B}(1 - f_i^{q-1})/(1-q) = -\mathrm{k_B} \ln_q f_i$:

$$S_q \equiv \langle s_q(f_i)\rangle_q = \sum_{i=1}^{W} f_i^q s_q(f_i) = -\mathrm{k_B}\sum_{i=1}^{W} f_i^q \ln_q f_i = -\mathrm{k_B}\langle \ln_q f_i\rangle_q . \qquad (9)$$

В данной работе мы будем использовать наиболее простой способ[21] определения равновесной функции распределения f_i для сложной неаддитивной системы, основанный на теории информации. Равновесная функция распределения для дискретных систем в статистике Тсаллиса может быть определена, как и в классическом случае, из экстремума (максимума − при $q>1$ и минимума − при $q<1$) q-энтропии системы при выполнении дополнительных условий: постоянства нормировки $\sum_i f_i = 1$ и постоянства полной энергии системы $\mathrm{E} = \langle \varepsilon_i \rangle_q = \sum_i f_i^q \varepsilon_i = const$ (здесь ε_i − энергия i-го состояния).

Следуя методу множителей Лагранжа, найдём абсолютный экстремум лагранжиана

$$L_q \equiv -\mathrm{k_B}\langle \ln_q f_i\rangle_q - \alpha_1\left(\sum_{i=1}^{W} f_i - 1\right) - \alpha_2\left(\sum_{i=1}^{W} f_i^q \varepsilon_i - \mathrm{E}\right). \qquad (10)$$

Тогда дифференцирование L_q по f_i приводит к обобщённому равновесному распределению Больцмана

$$f_i^{(eq)} = Z_q^{-1}\left[1-(1-q)\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right]^{1/(1-q)} \equiv Z_q^{-1}\exp_q\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right\}. \qquad (11)$$

Здесь

$$Z_q \equiv \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{\mathrm{k_B}q}\alpha_1\right)^{1/(1-q)} = \sum_{i=1}^{W}\exp_q\left\{-\frac{\varepsilon_i}{\mathrm{k_B}T}\right\} \quad \text{и} \quad T \equiv \frac{1}{\alpha_2} \qquad (12)$$

− соответственно обобщённая статистическая сумма, определяемая из условия нормировки, и модуль распределения, играющий роль температуры; постоянные лагранжевы множители α_1 и α_2 определяются из уравнений (11). Поведение распределения (11) при больших значениях энергии отличается от классического: в частности, при $q>1$ имеет место степенное, а не экспоненциальное падение с ростом энергии.

Важно иметь в виду следующее: на основе энтропии Тсаллиса, даже для одной и той же сложной системы, можно получить совершенно разные статистические картины, если исходить из различающихся между собой формулировок статистической теории[24]. Эти разные статистики, характеризующиеся способом определения среднего значения $\langle \phi \rangle_q$ случайной величины, имеют свои преимущества и недостатки. В частности, первоначальная статистика Тсаллиса ($\langle \phi \rangle_q = \sum_i f_i\, \phi_i$) не содержит физической температуры − температура зависит от энтропийного индекса q, благодаря чему нарушается структура Лежандра термодинамической схемы теории сложных систем[19]. Статистика

Тсаллиса-Мендеса-Пластино ($\langle\phi\rangle_q = \sum_i f_i^q \phi_i / \langle 1\rangle_q$, здесь $\langle 1\rangle_q \equiv \sum_i f_i^q$ − так называемая деформированная единица), в которой усреднение производится по эскортному распределению вероятности, приводит к корректному определению средних величин типа внутренней энергии[25,26]. Однако и она не позволяет преодолеть указанную выше трудность. Статистическая теория Курадо-Тсаллиса[20], в рамках которой проводится данное рассмотрение, основывающаяся на определении (11) температуры и равновесном распределении (10), не нарушает структуры Лежандра термодинамической схемы сложных систем; однако принципиальным её недостатком является отсутствие нормировки $\sum_i f_i^q \neq 1$.

3. НЕПРЕРЫВНОЕ РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим теперь аномальную физическую систему с непрерывным распределением частиц $f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)$ по пространству скоростей и физическому пространству. Элемент объёма фазового пространства (с нецелой, в общем случае, размерностью) далее будем обозначать через $dz \equiv d\boldsymbol{r}d\boldsymbol{c}$. Будем считать, что когда области интегрирования специально не указываются, используемые ниже интегралы охватывают всю рассматриваемую физическую область и все пространство скоростей соответственно. Энтропия Тсаллиса в этом случае определяется выражением[20]

$$S_q = \mathrm{k}_B \frac{1-\int [f(z)]^q dz}{q-1}, \quad \left(\int f(z)dz = 1\right), \tag{13}$$

где интегрирование производится по всему фазовому (в общем случае фрактальному) объёму. Используя обозначение

$$\langle\phi^k\rangle_q \equiv \int \phi^k(z)[f(z)]^q dz \tag{14}$$

для средней величины параметра системы $\phi^k(z)$, найдём равновесное распределение для функции $f(z)$, исходя из принципа экстремума q-энтропии при выполнении дополнительных условий (законов сохранения)

$$\langle\phi^k\rangle_q = const, \quad (k=1,2,...,n),$$

(здесь индекс k относится к набору макроскопических величин, полностью характеризующих состояние макроскопической системы). В результате получим

$$f^{(eq)}(z) = \left[q - \mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} q(1-q)\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi^k(z)\right]^{1/(1-q)} \equiv q^{1/(1-q)} \exp_q\left\{-\mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\phi^k(z)\right\}, \tag{15}$$

где постоянные множители Лагранжа α_k определяются из уравнений

$$\langle \phi^k \rangle_q \equiv \int \phi^k(\boldsymbol{z}) \left[q - \mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} q(1-q) \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi^k(\boldsymbol{z}) \right]^{\frac{q}{1-q}} d\boldsymbol{z} = const\,, \quad (k = 1,2,\ldots,n). \qquad (16)$$

Предполагая, что нет внешних сил могущих приводить к нарушению равновесия, и считая, что при равновесии распределение частиц пространственно однородно, рассмотрим к каким следствиям приводит принцип экстремума q-энтропии в такой макроскопической системе. Имея в виду постоянство массовой плотности

$$\rho_q \equiv \int m[f(\boldsymbol{z})]^q d\boldsymbol{z} / (\int d\boldsymbol{r})\,,$$

средней (на единицу массы) гидродинамической скорости

$$\boldsymbol{U}_q \equiv \int m\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{z})]^q d\boldsymbol{z} / (\rho_q \int d\boldsymbol{r})$$

и средней (на единицу массы) кинетической энергии

$$\varepsilon_q = \int (mc^2/2)[f(\boldsymbol{z})]^q d\boldsymbol{z} / (\rho_q \int d\boldsymbol{r})$$

(здесь m − масса одной частицы; $\rho_q \mathrm{V} = M_q$ − полная масса системы; $\mathrm{V} = \int d\boldsymbol{r}$ − объём системы), распределение (15) запишем в виде

$$f^{(eq)}(\boldsymbol{c}) = q^{1/(1-q)} \exp_q \left[-\mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} \left(m\alpha_1 + m\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{\alpha}_2 + mc^2\alpha_3 \right) \right],$$

где α_k − постоянные лагранжевы множители. Отсюда получаем равновесное распределение частиц сложной системы

$$f^{(eq)}(\boldsymbol{c}) = Z(q) \exp_q \left(-\frac{m}{2\mathrm{k}_\mathrm{B} T_q} \left| \boldsymbol{c} - \boldsymbol{U} \right|^2 \right), \qquad (17)$$

где вместо постоянных α_k введены следующие комбинации лагранжевых множителей:

$$Z(q) \equiv (q\alpha_3 T_q)^{\frac{1}{1-q}}, \quad T_q \equiv \frac{1}{\alpha_3} \left[1 - \mathrm{k}_\mathrm{B}^{-1} m(1-q) \left(\alpha_1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2^2}{2\alpha_3} \right) \right], \quad \boldsymbol{U} \equiv -\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\alpha_3}. \qquad (18)$$

Для нахождения параметров $Z(q)$, T_q и $\boldsymbol{U}$ надо вычислить следующие три интеграла на фрактале в пространстве (с нецелой размерностью D) мгновенных скоростей:

$$\begin{pmatrix} \rho_q = const \\ \rho_q \boldsymbol{U}_q = const \\ \rho_q \varepsilon_q = const \end{pmatrix} = mZ^q \int d^D\boldsymbol{c} \left[1-(1-q)\frac{m}{2k_B T_q}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}\right|^2 \right]^{q/(1-q)} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{c} \\ c^2/2 \end{pmatrix}. \qquad (19)$$

Вводя обозначения:

$$\boldsymbol{w} \equiv \sqrt{m/2k_B|\Theta|}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}), \quad \Theta \equiv T_q/(q-1), \quad \mathrm{sgn}\Theta = \begin{cases} 1, & \Theta > 0 \\ 0, & \Theta = 0 \\ -1, & \Theta < 0 \end{cases}, \qquad (20)$$

перепишем уравнения (19) в виде

$$\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \boldsymbol{U}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} = mZ^q \left(\frac{2k_B|\Theta|}{m} \right)^{\frac{D}{2}} \int d^D\boldsymbol{w} \left[1 + w^2 \,\mathrm{sgn}\Theta \right]^{\frac{q}{1-q}} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} + \boldsymbol{w}\sqrt{2\mathrm{k}_B|\Theta|/m} \\ \frac{U^2}{2} + \boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{w}\sqrt{2\mathrm{k}_B|\Theta|/m} + (2\mathrm{k}_B|\Theta|/m)w^2 \end{pmatrix} \qquad (21)$$

По поводу интегрирования по $\boldsymbol{w}$ в пространстве скоростей с нецелой размерностью D заметим следующее: известно, что если область интегрирования по $\boldsymbol{w}$ сферически симметрична (что всегда можно предполагать[27,28], то D-мерное интегрирование сводится к обычному интегрированию в соответствии с формулой

$$\int f(\boldsymbol{w})d^D\boldsymbol{w} = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}\int_0^\infty f(\boldsymbol{w})|\boldsymbol{w}|^{D-1}d|\boldsymbol{w}| = \frac{\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)}\int_0^\infty f(x)x^{D/2-1}dx. \qquad (22)$$

Здесь $x \equiv w^2$; $\Gamma(\mathrm{x})-$ гамма функция. С учетом формулы (22) интегралы (21) принимают вид

$$\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \boldsymbol{U}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} = \frac{mZ^q}{\Gamma(D/2)} \left(\frac{2\pi \mathrm{k_B}}{m|\Theta|} \right)^{D/2} \int dx\, x^{D/2-1}(1+\mathrm{sgn}\Theta\, x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \mathrm{k}_B\, x/m|\Theta| \end{pmatrix},$$

где пределы интегрирования определяются в зависимости от значения функции $\mathrm{sgn}\Theta$: если $\mathrm{sgn}\Theta = 1$, то подынтегральная функция определена для $0 \le x < \infty$; если

$\operatorname{sgn}\Theta = -1$, то подынтегральная функция определена только для $0 \le x \le 1$. В результате будем иметь:

$$\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q \boldsymbol{U}_q \\ \rho_q \varepsilon_q \end{pmatrix} = \frac{mZ^q}{\Gamma(D/2)} \left(\frac{2\pi \mathrm{k_B} |\Theta|}{m} \right)^{D/2} \times$$

$$\times \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dx\, x^{\frac{D}{2}-1} (1+x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{k_B}|\Theta|}{m} x \end{pmatrix}, & \text{для } \operatorname{sgn}\Theta = +1; \\ \\ \displaystyle\int_0^1 dx\, x^{\frac{D}{2}-1} (1-x)^{\frac{q}{1-q}} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{\mathrm{k_B}|\Theta|}{m} x \end{pmatrix}, & \text{для } \operatorname{sgn}\Theta = -1; \end{cases} =$$

$$= mZ^q \left(\frac{2\pi \mathrm{k_B} T_q}{m} \right)^{D/2} \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\frac{q}{q-1} - \frac{D}{2})}{|q-1|^{D/2}\, \Gamma(\frac{q}{q-1})} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{D \mathrm{k}_B T_q / 2m}{1-(q-1)\frac{D}{2}} \end{pmatrix}, & \text{когда} \quad q > 1; \\ \\ \dfrac{\Gamma(\frac{1}{1-q})}{|q-1|^{D/2}\, \Gamma(\frac{1}{1-q} + \frac{D}{2})} \begin{pmatrix} 1 \\ \boldsymbol{U} \\ \frac{U^2}{2} + \frac{D \mathrm{k}_B T_q / 2m}{1-(q-1)\frac{D}{2}} \end{pmatrix}, & \text{когда} \quad q < 1. \end{cases} \tag{23}$$

Первое соотношение (23) позволяет выразить обобщённый статистический интеграл $Z(q)$ через массовую q-плотность системы ρ_q:

$$Z(q) \equiv \left\{ q \left[1 - (1-q) \frac{m}{\mathrm{k_B}} \left(\alpha_1 - \frac{\boldsymbol{\alpha}_2^2}{2\alpha_3} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{1-q}} = \left\{ \frac{\rho_q}{m} \left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T_q} \right)^{\frac{D}{2}} \zeta(q, D) \right\}^{\frac{1}{q}}, \tag{24}$$

где

$$\varsigma(q,D) \equiv \begin{cases} \dfrac{|q-1|^{D/2}\,\Gamma[q/(q-1)]}{\Gamma[q/(q-1)-D/2]}, & \textit{когда} \quad q>1; \\[2ex] \dfrac{|q-1|^{D/2}\,\Gamma[1/(1-q)+D/2]}{\Gamma[1/(1-q)]}, & \textit{когда} \quad q<1. \end{cases} \tag{25}$$

Второе соотношение (23) связывает параметр $\boldsymbol{U}$ со средней гидродинамической q-скоростью системы

$$\boldsymbol{U}_q = \boldsymbol{U} \equiv -\boldsymbol{\alpha}_2/\alpha_3, \tag{26}$$

а третье соотношение, сводящееся к виду

$$\varepsilon_q \equiv \frac{U_q^2}{2} + \varepsilon_q^{int} = \frac{U_q^2}{2} + \frac{D\,\mathrm{k_B}\,T_q}{2m}(1+(1-q)\tfrac{D}{2})^{-1},$$

$$\varepsilon_q^{int} \equiv \frac{D\,\mathrm{k_B}\,T_q}{2m}(1+(1-q)\tfrac{D}{2})^{-1}, \tag{27}$$

(где $\varepsilon^{int} \equiv D\,\mathrm{k}_B\,T/2m$ − «обычная» внутренняя энергия (на единицу массы) системы), связывает введённый параметр T_q (см. формулу (18)) с «термодинамической» температурой T системы:

$$T_q = T(1-(q-1)\tfrac{D}{2}). \tag{28}$$

Поскольку определение температуры в неаддитивной статистике достаточно произвольно, то далее мы будем интерпретировать параметр T_q как обобщённую «температуру». Эта q-температура, в корне отличаясь от термодинамически определённой величины, характеризует интенсивность хаотизации (беспорядочного движения) объектов сложной системы. Заметим, что в случае сохранения обычного представления о температуре, выражение (28) накладывает жёсткое ограничение на величину q: поскольку в этом случае $(1-(q-1)\tfrac{D}{2})>0$, и, следовательно, энтропийный индекс $q<1+2/D$.

Итак, распределение функции $f(\boldsymbol{c})$ по скоростям для глобального равновесия сложной однородной системы (17) принимает следующий вид обобщённого распределения Максвелла:

$$f^{(eq)}(\boldsymbol{c},\rho_q,T_q,\boldsymbol{U}_q) = \varsigma(q,D)\frac{\rho_q}{m}\left(\frac{m}{2\pi\mathrm{k_B}\,T_q}\right)^{D/2}\exp_q\left(-\frac{m}{2\mathrm{k_B}\,T_q}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q\right|^2\right). \tag{29}$$

Заметим, что параметры ρ_q, T_q и $\boldsymbol{U}_q$ в этом выражении постоянны, т.е. не зависят от пространственной координаты $\boldsymbol{r}$ и времени t.

4. УРАВНЕНИЯ q-ГИДРОДИНАМИКИ

Энтропия Тсаллиса влечёт за собой не только обобщение статистической физики и термодинамики, но и обобщение физической кинетики. Будем далее предполагать, что для неоднородных систем, находящихся в термодинамическом равновесии, локальная функция распределения по скоростям имеет *обобщённый локально-максвелловский вид* $f^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)$, т.е. такую же функциональную форму (29), как и для случая глобального равновесия сложной неаддитивной системы, но с параметрами $n_q(\boldsymbol{r},t)$, $T_q(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{U}_q(\boldsymbol{r},t)$, зависящими от координаты $\boldsymbol{r}$ и времени t:

$$f^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)=\varsigma(q,D)n_q(\boldsymbol{r},t)\left(\frac{m}{2\pi \mathrm{k_B} T_q(\boldsymbol{r},t)}\right)^{\frac{D}{2}}\exp_q\left(-\frac{m}{2\mathrm{k_B}T_q(\boldsymbol{r},t)}\left|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q(\boldsymbol{r},t)\right|^2\right), \tag{30}$$

где

$$T_q(\boldsymbol{r},t)=m\left[2\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t)-U_q^2(\boldsymbol{r},t)\right]\left[1+(1-q)\tfrac{D}{2}\right]/\,D\mathrm{k_B}\,n_q(\boldsymbol{r},t);$$

$$n_q(\boldsymbol{r},t)=\rho_q(\boldsymbol{r},t)/m$$

– локальная q-плотность числа частиц. Возможность введения локально-равновесного распределения связана с тем, что существуют два масштаба времени релаксации, различного порядка величин[29]: время релаксации τ_r для установления статистического равновесия во всей сложной системе, зависящее от её объёма, и другое, значительно меньшее время релаксации $\tau \ll \tau_r$, которое определяет время установления равновесия в макроскопически малом (но содержащем большое число элементов) объёме и не зависит от объёма $\mathrm{V}=\int d\boldsymbol{r}$ всей системы. Локально-равновесное состояние сначала устанавливается за время τ в подобных малых объёмах, а затем медленно стремится к распределению (29), с характерным временем τ_r. Для того чтобы вновь введённые параметры имели смысл локальной числовой плотности, обобщённой температуры и средней массовой скорости, необходимо подчинить их следующим условиям:

$$\begin{pmatrix} n_q(\boldsymbol{r},t)\\ n_q\boldsymbol{U}_q(\boldsymbol{r},t)\\ n_q\varepsilon_q(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix}=\int d^D\boldsymbol{c}[f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{c}\\ c^2/2\end{pmatrix}=\int d^D\boldsymbol{c}[f^{(0)}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q\begin{pmatrix}1\\ \boldsymbol{c}\\ c^2/2\end{pmatrix}. \tag{31}$$

Кинетическое построение гидродинамической и квазигидродинамической системы уравнений для сложной неаддитивной системы проведём на основе модифицированного кинетического уравнения с интегралом столкновений в форме *Бхатнагара-Гросса-Крука* (БГК)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{c}\cdot\nabla_r+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})\cdot\nabla_c\right)[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q=-\frac{1}{\tau}\left\{[f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q-[f^{(0)}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{c},t)]^q\right\}\equiv\Im(f^q)\,, \quad (32)$$

в котором $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ − не зависящая от скорости внешняя сила (на единицу массы); τ − положительный параметр, который интерпретируется как характерное время релаксации функции f к локально-максвелловскому распределению $f^{(0)}$, определяемому формулой (30); $\Im(f^q)$ − интеграл столкновений в БГК приближении. Величина τ совпадает по порядку величины со средним временем свободного пробега частиц в сложной системе.

<u>Моментные уравнения.</u> Прежде всего, получим уравнение непрерывности. Для этого проинтегрируем умноженное на m уравнение (32) по скоростям. Воспользовавшись определениями (31), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_q+\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{U}_q)=0\,. \quad (33)$$

Здесь использовано обычное предположение, что величина f достаточно быстро стремится к нулю при больших значениях $\boldsymbol{c}$.

Уравнение движения, или q-уравнение баланса импульса, можно получить аналогичным образом: интегрируя по скоростям предварительно умноженное на $m\boldsymbol{c}$ уравнение (32). В результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q\boldsymbol{U}_q)+\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{U}_q\otimes\boldsymbol{U}_q+\boldsymbol{P}_q)-\rho_q\boldsymbol{F}=0\,, \quad (34)$$

где

$$\boldsymbol{P}_q(\boldsymbol{r},t)\equiv m\int d^D\boldsymbol{c}\;(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q)\otimes(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q)[f(\boldsymbol{c},\boldsymbol{r},t)]^q \quad (35)$$

− симметричный тензор q-давлений; $\nabla\cdot\boldsymbol{P}_q\equiv\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\boldsymbol{P}_q)_{\beta\alpha}=\sum_\beta\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\boldsymbol{P}_q)_{\alpha\beta}$; символы $\otimes$ и «$\cdot$» используются здесь для обозначения операций прямого тензорного и скалярного произведений соответственно.

Из уравнения (34) можно получить уравнение баланса для кинетической энергии движения центра инерции, умножая обе части скалярно на среднюю гидродинамическую q-скорость $\boldsymbol{U}_q$; в результате будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho_q\left|\boldsymbol{U}_q\right|^2}{2}\right)+\nabla\cdot\left(\frac{\rho_q\left|\boldsymbol{U}_q\right|^2}{2}\boldsymbol{U}_q+\boldsymbol{P}_q\cdot\boldsymbol{U}_q\right)-\boldsymbol{P}_q:\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q-\rho_q\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}_q=0, \qquad (36)$$

где

$$\boldsymbol{P}_q:\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q=\sum_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{P}_q)_{\alpha,\beta}\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\boldsymbol{U}_q)_\alpha=\sum_{\alpha,\beta}(\boldsymbol{P}_q)_{\beta,\alpha}\frac{\partial}{\partial r_\beta}(\boldsymbol{U}_q)_\alpha .$$

В частном случае полного равновесия, когда имеет место локально-максвелловское распределение (30), тензор $\boldsymbol{P}_q$ сводится к шаровому тензору, $\boldsymbol{P}_q^{(1)}\equiv p_q\boldsymbol{I}$. Действительно, в силу (20) имеем

$$\boldsymbol{P}_q^{(1)}(\boldsymbol{r},t)\equiv m\int d^D\boldsymbol{c}[f^{(0)}]^q\,(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q)\otimes(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q)=$$

$$=\left(\frac{2\mathrm{k_B}}{m}\left|\frac{T_q}{q-1}\right|\right)^{\frac{D+2}{2}}\int d^D\boldsymbol{w}[f^{(0)}]^q m\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w}=$$

$$=\boldsymbol{I}\left(\frac{2\mathrm{k_B}}{m}\left|\frac{T_q}{q-1}\right|\right)^{\frac{D+2}{2}}\int d^D\boldsymbol{w}[f^{(0)}]^q m w_1^2=\frac{n_q\mathrm{k_B}T_q}{1+(1-q)D/2}\boldsymbol{I}\equiv p_q\boldsymbol{I}. \qquad (37)$$

(здесь $\boldsymbol{I}$ − трёхмерный единичный тензор). При написании этого выражения нами были учтены следующие два обстоятельства:

− все недиагональные элементы тензора $\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}$ обращаются в нуль при усреднении с помощью функции распределения $[f^{(0)}]^q$;

− для выполнения интегрирования по элементу объёма $d^D\boldsymbol{w}$ мы воспользовались формулой[27] $d^D\boldsymbol{w}=\dfrac{2\pi^{(D-1)/2}}{\Gamma(\frac{D-1}{2})}w^{D-1}dwd\vartheta$, где $w_1=w\cos\vartheta$, $0\le\vartheta\le\pi$.

Таким образом, величину p_q можно интерпретировать как скалярное гидростатическое давление в сложной системе, для которого справедливо соотношение

$$p_q(\boldsymbol{z},t)=\frac{\mathrm{k_B}}{m\left[1+(1-q)\dfrac{D}{2}\right]}\rho_q(\boldsymbol{z},t)T_q(\boldsymbol{z},t)=\frac{2}{D}\rho_q(\boldsymbol{z},t)\varepsilon_q^{int}(\boldsymbol{z},t)\ , \qquad (38)$$

играющее здесь роль закона состояния в q-гидродинамике и являющееся аналогом закона состояния в кинетической теории совершенных газов.

Для вывода последнего гидродинамического уравнения − уравнения баланса полной энергии неаддитивной системы ($\varepsilon_q \equiv U_q^2/2+\varepsilon_q^{int}$) − умножим кинетическое уравнение (32) на $m|\boldsymbol{c}|^2/2$ и результат проинтегрируем по скоростям частиц. После этого будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q\varepsilon_q)+\nabla\cdot\left(\rho_q\varepsilon_q\boldsymbol{U}_q+\boldsymbol{J}_q+\boldsymbol{P}_q\cdot\boldsymbol{U}_q\right)-\rho_q\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{U}_q=0, \quad (39)$$

где поток тепла $\boldsymbol{J}_q$ определяется соотношением

$$\boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{r},t)\equiv\int\frac{m|\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q|^2}{2}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{U}_q)[f(\boldsymbol{z},t)]^q d^D\boldsymbol{c}=$$

$$=\left(\frac{2\mathrm{k_B}}{m}\left|\frac{T_q}{q-1}\right|\right)^{\frac{D+2}{2}}\int m\frac{|\boldsymbol{w}|^2}{2}\boldsymbol{w}[f(\boldsymbol{z},t)]^q d^D\boldsymbol{w}. \quad (40)$$

Легко показать, что в частном случае полного равновесия, когда имеет место локально-максвелловское распределение (30), поток тепла равен нулю, $\boldsymbol{J}_q^{(1)}=0$.

Вычитая (36) из (39), получим следующее уравнение баланса для внутренней q-энергии $\varepsilon_q^{int}(\boldsymbol{r},t)=\dfrac{D\mathrm{k_B}T_q(\boldsymbol{r},t)}{2m}(1-(q-1)\tfrac{D}{2})^{-1}$ сложной системы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q\varepsilon_q^{int})+\nabla\cdot\left(\rho_q\varepsilon_q^{int}\boldsymbol{U}_q+\boldsymbol{J}_q\right)+\boldsymbol{P}_q:\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q=0. \quad (41)$$

Из этого уравнения вытекает уравнение переноса q-температуры

$$\frac{\rho_q\mathrm{k_B}}{2m}\frac{D}{1+(1-q)D/2}\left(\frac{\partial T_q}{\partial t}+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla T_q\right)+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_q+\boldsymbol{P}_q:\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q=0, \quad (42)$$

которое, в случае использования локально-максвелловского распределения (30), сводится к простому замыкающему уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla\right)\ln(p_q/\rho_q^{1+2/D})=0, \quad (43)$$

справедливому для адиабатического ($\boldsymbol{J}_q^{(1)}=0$) режима течения.

Если ввести полную производную по времени $d(\,)/dt\equiv\partial(\,)/\partial t+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla(\,)$, то уравнениям q-гидродинамики (33), (34) и (39), в случае обобщённого локально-максвелловского распределения (30) частиц по скоростям, можно придать следующий вид:

$$\begin{cases} \rho_q \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{\rho_q}\right) \equiv \rho_q \left\{ \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{1}{\rho_q}\right) + \boldsymbol{U}_q \cdot \nabla \left(\dfrac{1}{\rho_q}\right) \right\} = \nabla \cdot \boldsymbol{U}_q, \\ \rho_q \dfrac{d\boldsymbol{U}_q}{dt} \equiv \rho_q \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{U}_q}{\partial t} + (\boldsymbol{U}_q \cdot \nabla) \boldsymbol{U}_q \right) = -\nabla p_q + \rho_q \boldsymbol{F}, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p_q}{\rho_q^{1+2/D}} \right) = 0. \end{cases} \tag{44}$$

Таким образом, в этом случае параметры ρ_q, T_q и $\boldsymbol{U}_q$ удовлетворяют модифицированным уравнениям Эйлера, вместе с законом адиабатического изменения q-температуры и модифицированным уравнением состояния (38).

5. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНТРОПИИ. H-ТЕОРЕМА БОЛЬЦМАНА

Получим теперь уравнение баланса энтропии и найдём выражения для кинетического потока энтропии и интенсивности источника энтропии. Покажем также, что для модели БГК (32) справедлив аналог H-теоремы Больцмана.

Введём по аналогии с классической кинетической теорией газов плотность q-энтропии следующим образом:

$$\rho_q s_q(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{k}_B \int d^D\boldsymbol{c}\, [f(\boldsymbol{z},t)]^q \ln_q f(\boldsymbol{z},t)\,, \quad \left(S_q = \int \rho_q s_q d\boldsymbol{r} \right). \tag{45}$$

Дифференцируя это соотношение по времени, находим с учетом уравнения (32) и формулы $d(\ln_q x)/dx = 1/x^q$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) = -\mathrm{k}_\mathrm{B} \int d^D\boldsymbol{c} \left(q f^{q-1} \ln_q f + 1 \right) \frac{\partial f}{\partial t} = -\mathrm{k}_\mathrm{B} \int d^D\boldsymbol{c} \left(\ln_q f + \frac{f^{1-q}}{q} \right) \frac{\partial f^q}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\mathrm{k}_\mathrm{B}}{q} \int d^D\boldsymbol{c}\, (\ln_q f + 1) \frac{\partial f^q}{\partial t} =$$

$$= -\frac{\mathrm{k}_\mathrm{B}}{q} \int d^D\boldsymbol{c}\, (\ln_q f + 1) \left[-\boldsymbol{c} \cdot \nabla_r f^q - \boldsymbol{F} \cdot \nabla_c f^q + \Im(f^q) \right]. \tag{46}$$

С учетом предположения, что функция распределения f при $\boldsymbol{c} \to \infty$ достаточно быстро обращается в нуль, проинтегрируем (46) по частям; в результате получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) = \nabla_r \cdot \Big(\mathrm{k_B} \int \boldsymbol{c} f^q \ln_q f\, d^D\boldsymbol{c}\Big) - \frac{\mathrm{k_B}}{q}\int (\ln_q f + 1)\, \Im(f^q) d^D\boldsymbol{c} =$$

$$= \nabla_r \cdot \Big(\mathrm{k_B} \boldsymbol{U}_q \int f^q \ln_q f\, d^D\boldsymbol{c}\Big) + \nabla_r \cdot \Big(\mathrm{k_B} \int (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}_q) f^q \ln_q f\, d^D\boldsymbol{c}\Big) -$$

$$- \frac{\mathrm{k_B}}{q}\int (\ln_q f + 1)\, \Im(f^q)\, d^D\boldsymbol{c}. \qquad (47)$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_q s_q) + \nabla \cdot (\rho_q s_q \boldsymbol{U}_q + \boldsymbol{J}_{s_q}) = \sigma_q\,, \qquad (48)$$

где

$$\boldsymbol{J}_{s_q}(\boldsymbol{r},t) = -\mathrm{k_B}\int \mathrm{d}^D\boldsymbol{c}\Big(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}_q\Big)[f(\boldsymbol{z},t)]^q \ln_q f(\boldsymbol{z},t) = -\mathrm{k_B}\int \mathrm{d}^D\boldsymbol{c}\Big(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}_q\Big)\, s_q(f) \qquad (49)$$

– поток q-энтропии;

$$\sigma_q(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\mathrm{k_B}}{q}\int d^D\boldsymbol{c}\,\Big\{ \ln_q[f(\boldsymbol{z},t)] + 1\Big\}\, \Im(f^q) \qquad (50)$$

– интенсивность источника q-энтропии.

Выпишем теперь в явном виде статистическое выражение (50) для интенсивности источника энтропии. С учетом (32) это выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$\sigma_q = \frac{\mathrm{k_B}}{q\tau}\int d^D\boldsymbol{c}\, (\ln_q f + 1)\,\Big\{ f^q - [f^{(0)}]^q\Big\} = \frac{\mathrm{k_B}}{(q-1)\tau}\int d^D\boldsymbol{c}\left(1 - \frac{1}{qf^{q-1}}\right)\Big\{ f^q - [f^{(0)}]^q\Big\} =$$

$$= \frac{\mathrm{k_B}}{(q-1)\tau}\int d^D\boldsymbol{c}\left(f^q - [f^{(0)}]^q - \frac{f^q - [f^{(0)}]^q}{q\, f^{q-1}}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{k_B}}{(q-1)\tau}\int d^D\boldsymbol{c}\left\{(1-q)\Big(f^q \ln_q f - [f^{(0)}]^q \ln_q f^{(0)}\Big) + f - [f^{(0)}] - \frac{f^q - [f^{(0)}]^q}{q\, f^{q-1}}\right\} =$$

$$= \frac{(\rho_q s_q)^{(0)} - \rho_q s_q}{\tau} + \frac{\mathrm{k_B}}{(q-1)\tau}\int d^D\boldsymbol{c}\left(f(\boldsymbol{z},t) - f^{(0)}(\boldsymbol{z},t) - \frac{[f(\boldsymbol{z},t)]^q - [f^{(0)}(\boldsymbol{z},t)]^q}{q[f(\boldsymbol{z},t)]^{q-1}}\right) =$$

$$= \frac{(\rho_q s_q)^{(0)} - \rho_q s_q}{\tau} + \frac{\mathrm{k_B}}{\tau}\int d^D\boldsymbol{c}[f^{(0)}(\boldsymbol{z},t)]\Phi\left(\frac{f(\boldsymbol{z},t)}{f^{(0)}(\boldsymbol{z},t)}\right). \qquad (51)$$

При выводе этого выражения нами были использованы следующие соотношения

$$\ln_q f + 1 = q(1/q\, f^{q-1} - 1)/(1-q)\,, \quad f^q = f + (q-1) f^q \ln_q f \tag{52}$$

и введено обозначение

$$\Phi(x) \equiv \left[x - 1 - x^{1-q}(x^q - 1)/q \right]/(q-1)\,. \tag{53}$$

Заметим, что первое слагаемое в формуле (51) положительно, поскольку энтропия максимальна для функции распределения $f^{(0)}(\boldsymbol{z},t)$. Можно показать, что функция $\Phi(x)$ неотрицательна при положительном аргументе, $x > 0$. Отсюда следует, что интенсивность источника энтропии (при $q > 0$)

$$\sigma_q(\boldsymbol{r},t) \ge 0\,, \tag{54}$$

причём равенство имеет место только при равновесии. Неравенство (54), известное в кинетической теории газов под названием H*-теоремы Больцмана*, означает, что интенсивность q-энтропии положительна или равна нулю и в рамках кинетической теории сложных неаддитивных систем, что является выражением второго закона термодинамики. Если проинтегрировать уравнение (48) по всему объёму, занимаемому системой, то обобщённая H-теорема (в интегральном виде) выражает тот факт, что q-энтропия замкнутой системы может только увеличиваться (при $q > 0$) с течением времени и при $t \to \infty$ приближается к некоторому предельному значению.

6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БГК ПО МЕТОДУ ЧЕПМЕНА-ЭНСКОГА

Приведенные выше гидродинамические q-уравнения в общем случае не являются замкнутыми, поскольку неизвестна связь тензора давлений $\boldsymbol{P}_q$ и теплового потока $\boldsymbol{J}_q$ с массовой q-плотностью, q-скоростью и q-температурой. Эта связь может быть найдена с помощью решения модифицированного кинетического уравнения БГК, взятого в форме (32). Для этой цели мы используем *метод Энскога-Чепмена*[30], который позволяет найти нужное решение для состояний слабо отличающихся от равновесного. Поскольку основной целью работы является вывод базовой системы уравнений q-гидродинамики как основы построения моделей транспортных потоков, то далее для простоты будем считать, что $\boldsymbol{F} = 0$.

Напомним сначала, следуя[30], формальную схему метода Чепмена-Энскога. Перепишем кинетическое уравнение БГК (32) в виде:

$$\hat{D}\varphi = -\frac{1}{\tau}(\varphi - \varphi^{(0)})\,, \qquad \varphi = \varphi(\boldsymbol{z}) \equiv [f(\boldsymbol{z})]^q\,, \tag{55}$$

где τ − связанный с максвелловским временем релаксации параметр сглаживания; $\hat{D}$ − оператор, определённый соотношением

$$\hat{D} \equiv \partial/\partial t + \boldsymbol{c} \cdot \nabla \,. \tag{56}$$

Будем искать решение уравнения (55) в виде

$$\varphi(\boldsymbol{z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \varphi^{(k)}(\boldsymbol{z}), \tag{57}$$

где функции $\varphi^{(k)}$ определены таким образом, что они уменьшаются по мере роста индекса k. Параметр ε не имеет физического смысла и вводится только для того, чтобы можно было проследить порядок членов в разложении (57). Для того чтобы определения (31) для локальных параметров системы были выполнены, потребуем реализацию следующих равенств:

$$0 = \int d^D \boldsymbol{c}\, \varphi^{(k)}(\boldsymbol{z}) \begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix}, \quad (k \geq 1). \tag{58}$$

Заметим, что это не единственно возможный, но обычно принимаемый в классической кинетике, способ удовлетворить соотношениям (31).

Запишем теперь формальное решение уравнения (55) в виде

$$\varphi(\boldsymbol{z}) = (1 + \tau \hat{D})^{-1} \varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}) \tag{59}$$

и введём иерархию масштабов длины и времени таким образом, что оператор

$$\hat{D} = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \hat{D}_k \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \left(\partial/\partial t_k + \boldsymbol{c} \cdot \nabla \right). \tag{60}$$

Тогда из (59) и (60) следует

$$\varphi(\boldsymbol{z}) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tau^n \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \hat{D}_k \right)^n \right] \varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}), \tag{61}$$

откуда, с учетом (57), имеем

$$\varphi(\boldsymbol{z}) = \varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}) + \varepsilon \varphi^{(1)}(\boldsymbol{z}) + \varepsilon^2 \varphi^{(2)}(\boldsymbol{z}) + \ldots =$$

$$= \left[1 - \varepsilon \tau \hat{D}_1 - \varepsilon^2 \tau \left(\hat{D}_2 - \tau \hat{D}_1^2 \right) + \ldots \right] \varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}). \tag{62}$$

Из этого соотношения функции $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{z})$ определяются однозначно, если потребовать, чтобы коэффициенты при каждой степени ε в (62) в отдельности равнялись нулю. Тогда для определения всех функций $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{z})$ необходимо последовательно решить следующую систему уравнений:

$$\varphi^{(1)}(\boldsymbol{z}) = -\tau\,\hat{D}_1\varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}),$$

$$\varphi^{(2)}(\boldsymbol{z}) = -\tau(\,\hat{D}_2 - \tau\,\hat{D}_1^2\,)\varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}),$$

$$\varphi^{(3)}(\boldsymbol{z}) = -\tau(\,\hat{D}_3 - 2\tau\,\hat{D}_1\hat{D}_2 + \tau^2\hat{D}_1^3\,)\varphi^{(0)}(\boldsymbol{z}). \tag{63}$$

<u>Приближение первого порядка</u>. Легко видеть, что вытекающие из первого соотношения (63) уравнения

$$0 = \int d^D\boldsymbol{c}[f^{(1)}(\boldsymbol{z})]^q \begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix} = -\tau\int d^D\boldsymbol{c}\left[\frac{\partial}{\partial t_1}\begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix} + \nabla\cdot\begin{pmatrix} m\boldsymbol{c} \\ m\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2}\boldsymbol{c} \end{pmatrix}\right][f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q \tag{64}$$

совпадают с модифицированными уравнениями Эйлера (44) для q-системы.

<u>Приближение второго порядка</u>. Согласно второму соотношению (63) имеет место следующая связь между функциями $[f^{(2)}]^q$ и $[f^{(0)}]^q$:

$$[f^{(2)}(\boldsymbol{z})]^q = -\tau\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t_2} + \boldsymbol{c}\cdot\nabla\right) - \tau\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \boldsymbol{c}\cdot\nabla\right)^2\right\}[f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q. \tag{65}$$

Используя (65), можно получить следующую систему уравнений:

$$0 = \int d^D\boldsymbol{c}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t_2} + \boldsymbol{c}\cdot\nabla\right) - \tau\left(\frac{\partial}{\partial t_1} + 2\frac{\partial}{\partial t_1}\boldsymbol{c}\cdot\nabla + \nabla\nabla : \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}\right)\right\}[f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q \begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix}, \tag{66}$$

из которой, после простых преобразований, следует

$$\frac{\partial}{\partial t_2}\begin{pmatrix} \rho_q \\ \rho_q\boldsymbol{U}_q \\ \rho_q\varepsilon_q \end{pmatrix} + \nabla\cdot\begin{pmatrix} \rho_q\boldsymbol{U}_q \\ \rho_q\boldsymbol{U}_q\otimes\boldsymbol{U}_q + p_q\boldsymbol{I} \\ (\rho_q\varepsilon_q + p_q)\boldsymbol{U}_q \end{pmatrix} =$$

$$= \tau \nabla \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial t_1} \begin{pmatrix} \rho_q \boldsymbol{U}_q \\ \rho_q \boldsymbol{U}_q \otimes \boldsymbol{U}_q + p_q \boldsymbol{I} \\ (\rho_q \varepsilon_q + p_q) \boldsymbol{U}_q \end{pmatrix} + \nabla \cdot \int d^D \boldsymbol{c} [f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} \begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \tau \nabla \cdot \left\{ \begin{pmatrix} \rho_q \boldsymbol{W}_q \\ \rho_q \boldsymbol{W}_q \otimes \boldsymbol{U}_q + \boldsymbol{P}_q^{qv} \\ \left(\rho_q \varepsilon_q + p_q\right) \boldsymbol{W}_q + \boldsymbol{P}_q^{qv} \cdot \boldsymbol{U}_q - \boldsymbol{J}_q^{qv} \end{pmatrix} + \nabla \cdot \int d^D \boldsymbol{c} [f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} \begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2} \end{pmatrix} \right\}. \quad (67)$$

Здесь величины $\boldsymbol{W}_q$, $\boldsymbol{P}_q^{qvasi}$ и $\boldsymbol{J}_q^{qvasi}$ определяются соотношениями

$$\boldsymbol{W}_q \equiv -\left[\nabla \cdot (\rho_q \boldsymbol{U}_q \otimes \boldsymbol{U}_q) + \nabla p_q \right] / \rho_q, \quad (68)$$

$$\boldsymbol{P}_q^{qv} \equiv -\boldsymbol{U}_q \otimes \left(\rho_q (\boldsymbol{U}_q \cdot \nabla) \boldsymbol{U}_q + \nabla p_q \right) - \boldsymbol{I} \left\{ (\boldsymbol{U}_q \cdot \nabla) p_q + \left(1 + \frac{2}{D} \right) p_q \nabla \cdot \boldsymbol{U}_q \right\}, \quad (69)$$

$$\boldsymbol{J}_q^{qv} \equiv \boldsymbol{U}_q \left\{ \left[\frac{D}{2} \nabla p_q - \left(1 + \frac{D}{2} \right) p_q \nabla \ln \rho_q \right] \cdot \boldsymbol{U}_q \right\}. \quad (70)$$

Уравнения (67) образует результирующую систему гидродинамических q-уравнений в приближении второго порядка. Для окончательной записи этой системы необходимо вычислить тензорную дивергенцию от трёх интегралов.

При вычислении первого интеграла используем формулу (37) и тождество

$$\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} \equiv 2\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{U}_q - \boldsymbol{U}_q \otimes \boldsymbol{U}_q + (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}_q) \otimes (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{U}_q);$$

в результате будем иметь

$$\nabla \cdot \int d^D \boldsymbol{c}\, m\, \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} [f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q = \nabla \cdot (\rho_q \boldsymbol{U}_q \otimes \boldsymbol{U}_q) + \nabla p_q \equiv -\rho_q \boldsymbol{W}_q. \quad (71)$$

Для вычисления второй дивергенции необходимо проинтегрировать триаду $\boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c}$, что не вносит дополнительных трудностей по сравнению с первым приближением; после некоторых упрощений получим

$$\nabla \cdot \int d^D \boldsymbol{c}\, m \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c} [f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q = -\rho_q \boldsymbol{W}_q \otimes \boldsymbol{U}_q - \boldsymbol{P}_q^{qv} +$$

$$+ \nabla \cdot \left\{ p_q \left(\nabla \otimes \boldsymbol{U}_q + (\nabla \otimes \boldsymbol{U}_q)^T \right) - \frac{2}{D} p_q (\nabla \cdot \boldsymbol{U}_q) \boldsymbol{I} \right\}. \quad (72)$$

Наконец, для вычисления третьей дивергенции нужно проинтегрировать диаду $(m|\boldsymbol{c}|^2/2)\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}$. Используя ту же процедуру, что и при выводе формулы (23), получим после ряда преобразований следующий (не зависящий от знака функции $\mathrm{sgn}\,\Theta$) результат:

$$\nabla\cdot\int d^D\boldsymbol{c}\,\frac{m|\boldsymbol{c}|^2}{2}\,m\,\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}[f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q=-\nabla\cdot\left[\left(\rho_q\varepsilon_q+p_q\right)\boldsymbol{W}_q+\boldsymbol{P}_q^{qvasi}\cdot\boldsymbol{U}_q-\boldsymbol{J}_q^{qvasi}\right]+$$

$$+\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{U}_q\cdot\left[p_q\left(\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q+(\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q)^T\right)-\frac{2}{D}p_q(\nabla\cdot\boldsymbol{U}_q)\boldsymbol{I}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{k_B}}{m}\left(\frac{2+D}{2+(1-q)(2+D)}\right)p_q\left(\nabla T_q-\frac{(1-q)}{\mathrm{k_B}\,n_q}\nabla p_q\right)\right\}. \tag{73}$$

Используя теперь выражения (67)-(73), выпишем общую систему уравнений q-гидродинамики во втором приближении

$$\rho_q\left\{\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{1}{\rho_q}\right)+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla\left(\frac{1}{\rho_q}\right)\right\}=\nabla\cdot\boldsymbol{U}_q, \tag{74}$$

$$\rho_q\left(\frac{\partial\boldsymbol{U}_q}{\partial t_2}+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla\boldsymbol{U}_q\right)=-\nabla p_q+\nabla\cdot\boldsymbol{\Pi}_q, \tag{75}$$

$$\rho_q\left\{\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{|\boldsymbol{U}_q|^2}{2}+\varepsilon_q^{int}\right)+\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla\left(\frac{|\boldsymbol{U}_q|^2}{2}+\varepsilon_q^{int}\right)\right\}=-\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{J}_q+(p_q\boldsymbol{I}-\boldsymbol{\Pi}_q)\cdot\boldsymbol{U}_q\right\}. \tag{76}$$

Здесь

$$\boldsymbol{\Pi}_q\equiv-\boldsymbol{P}_q^{(2)}+p_q\boldsymbol{I}=\mu_q\left(\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q+(\nabla\otimes\boldsymbol{U}_q)^T-\tfrac{2}{3}(\nabla\cdot\boldsymbol{U}_q)\boldsymbol{I}\right)+\mu_\theta(\nabla\cdot\boldsymbol{U}_q)\boldsymbol{I} \tag{77}$$

− тензор вязких напряжений в q-гидродинамике;

$$\mu_q\equiv\tau p_q\equiv\tau\mathrm{k_B}\,\rho_q T_q\left\{m[1+(1-q)D/2]\right\}^{-1}$$

− коэффициент сдвиговой вязкости;

$$\mu_\theta(\boldsymbol{r},t)=\tau\,\tfrac{2}{3}\left(1-3/D\right)p_q=\tfrac{2}{3}\left(1-3/D\right)\mu_q$$

− коэффициент объёмной вязкости;

$$\boldsymbol{J}_q(\boldsymbol{r},t) \equiv \boldsymbol{J}_q^{(2)} = -\lambda_q \nabla T_q + \zeta_q \nabla p_q \tag{78}$$

− вектор потока тепла в q-гидродинамике;

$$\zeta_q(\boldsymbol{r},t) = (1-q) m\lambda_q / \mathrm{k_B}\,\rho_q;$$

$$\lambda_q(\boldsymbol{r},t) = \tau\frac{\mathrm{k_B}}{m}\left(\frac{2+D}{2+(1-q)(2+D)}\right)p_q = \tau\frac{\mathrm{k_B}}{m}\frac{1}{[1+(1-q)\frac{D}{2}]}\left(\frac{\mathrm{k}_B n_q T_q}{\frac{2}{2+D}+(1-q)}\right) \tag{79}$$

− коэффициент теплопроводности;

$$\varepsilon_q^{int}(\boldsymbol{r},t) = \frac{D}{2}\frac{p_q}{\rho_q} = \frac{D\mathrm{k_B}T_q(\boldsymbol{r},t)}{2m}(1+(1-q)\tfrac{D}{2})^{-1}, \quad (\varepsilon_q^{int} = \varepsilon_q - \left|\boldsymbol{U}_q\right|^2/2) \tag{80}$$

− внутренняя энергия (на единицу массы) рассматриваемой аномальной системы.

Полученная здесь гидродинамическая система q-уравнений (74)-(76) вместе с уравнением состояния (80), зависимостью коэффициентов сдвиговой вязкости μ_q и теплопроводности λ_q от q-плотности ρ_q и q-температуры T_q и граничными и начальными условиями полностью определяют q-давление, q-плотность и компоненты q-скорости. В модели имеются феноменологические константы q и D и параметр сглаживания τ, которые должны определяться в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных.

7. КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ

В работах[13-15,31,32] предложен способ регуляризации классических уравнений Эйлера, описывающих невязкие газодинамические течения, который позволяет строить эффективные численные алгоритмы решения соответствующих задач. Указанные алгоритмы основаны на *квазигидродинамических уравнениях* (КГД), которые показали свою эффективность при численном моделировании широкого круга течений сжимаемого газа. КГД -уравнения отличаются от уравнений Эйлера дополнительными дивергентными слагаемыми, обусловленными введением диффузионной скорости в уравнении неразрывности и дивергентных «вязкостно-теплопроводных» членов в уравнениях движения и энергии. Эти дополнительные члены, демонстрируя диссипативный характер, играют роль *регуляризаторов решения* и обеспечивают устойчивость и точность численных алгоритмов, построенных с учетом этих слагаемых.

С целью построения квазигидродинамической системы q-уравнений (регуляризованных q-уравнений Эйлера (44)) будем пренебрегать конвективными слагаемыми

$\tau\nabla\cdot\int d^D\boldsymbol{c}[f^{(0)}(\boldsymbol{z})]^q\,\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}\begin{pmatrix} m \\ m\boldsymbol{c} \\ \frac{mc^2}{2}\end{pmatrix}$ в системе уравнений (67), что позволяет получить соответствующие добавки к уравнениям Эйлера (44). Такой подход к выводу уравнений КГД соответствует способу построения квазигидродинамической системы уравнений в рамках классической кинетической теории газов на основе модифицированного кинетического уравнения БГК (32)[iii]. В результате получим систему квазигидродинамических уравнений в следующем виде:

$$\frac{\partial\rho_q}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{U}_q)=\tau\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{W}_q), \tag{81}$$

$$\frac{\partial(\rho_q\boldsymbol{U}_q)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{U}_q\otimes\boldsymbol{U}_q)+\nabla p_q=\tau\,\nabla\cdot\left\{\rho_q\boldsymbol{W}_q\otimes\boldsymbol{U}_q+\boldsymbol{P}_q^{qvasi}\right\}, \tag{82}$$

$$=\tau\,\nabla\cdot\left[\left(\rho_q\varepsilon_q+p_q\right)\boldsymbol{W}_q+\boldsymbol{P}_q^{qvasi}\cdot\boldsymbol{U}_q-\boldsymbol{J}_q^{qvasi}\right], \tag{83}$$

где величины $\tau\boldsymbol{W}_q$, $\tau\boldsymbol{P}_q^{qvasi}$ и $\tau\boldsymbol{J}_q^{qvasi}$ определяются соотношениями

$$\tau\boldsymbol{W}_q(\boldsymbol{r},t)\equiv-\tau\left[\nabla\cdot(\rho_q\boldsymbol{U}_q\otimes\boldsymbol{U}_q)+\nabla p_q\right]/\rho_q, \tag{84}$$

$$\tau\boldsymbol{P}_q^{qvasi}(\boldsymbol{r},t)\equiv-\tau\boldsymbol{U}_q\otimes\left(\rho_q(\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla)\boldsymbol{U}_q+\nabla p_q\right)-\tau\boldsymbol{I}\left\{(\boldsymbol{U}_q\cdot\nabla)p_q+\left(1+\frac{2}{D}\right)p_q\nabla\cdot\boldsymbol{U}_q\right\}, \tag{85}$$

$$\tau\boldsymbol{J}_q^{qvasi}(\boldsymbol{r},t)\equiv\tau\boldsymbol{U}_q\left\{\left[\frac{D}{2}\nabla p_q-\left(1+\frac{D}{2}\right)p_q\nabla\ln\rho_q\right]\cdot\boldsymbol{U}_q\right\} \tag{86}$$

и могут интерпретироваться соответственно как вектор потока *самодиффузии*, тензор вязких напряжений и поток тепла в квазигидродинамической системе q-уравнений. Термическое уравнение состояния имеет вид

$$p_q(\boldsymbol{r},t)=\frac{2}{D}\rho_q\varepsilon_q^{int}=\frac{\mathrm{k}_B\,\rho_q T_q}{m}(1-(q-1)\tfrac{D}{2})^{-1}, \tag{87}$$

[iii] Идеологию вывода различных вариантов квазигидродинамических систем уравнений и построения соответствующих конечно-разностных алгоритмов эффективного численного решения газодинамических задач (включая многочисленные приложения) можно найти в работах[13-15].

а внутренняя энергия системы $\varepsilon_q^{int} \equiv \varepsilon_q - |\boldsymbol{U}_q|^2 / 2$ определяется соотношением

$$\varepsilon_q^{int}(\boldsymbol{r},t) = \frac{D}{2}\frac{p_q(\boldsymbol{r},t)}{\rho_q(\boldsymbol{r},t)}. \quad (88)$$

Приведенная здесь квазигидродинамическая система q-уравнений является по нашему мнению весьма перспективной математической моделью неаддитивной среды, на основе которой возможно построение адекватных мезомасштабных моделей транспортных систем при математическом описании городской транспортной инфраструктуры. Именно для систем уравнений подобного рода были разработаны эффективные конечно-разностные алгоритмы, позволяющие при невысоких вычислительных затратах и возможностях параллельной реализации численно решать сложные гидродинамические задачи[13,16]. Предложенный подход может оказаться особенно эффективным для моделирования АТС, которое до последнего времени основывалось в основном на уравнениях классической газовой динамики[33-35].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе в рамках неаддитивной статистики Тсаллиса дан вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений. На основе этих уравнений могут быть сконструированы наиболее адекватные макроскопические и мезоскопические модели движения АТС, в которых транспортный поток уподобляется сжимаемой жидкости с мотивацией, обладающей рядом специфических свойств. Последние могут быть учтены через модифицированные коэффициенты переноса и соответствующие уравнения состояния, которые в рамках развитого подхода содержат три свободных параметра, определяемых в каждом конкретном случае эмпирическим путём из статистических или экспериментальных данных. Это позволяет при математическом описании транспортных систем более свободно и обоснованно моделировать реально складывающуюся дорожно-транспортную ситуацию. Например, часто используемое уравнение состояния $p = const\,\rho^2$ для так называемого «давления транспорта» в ряде гидродинамических транспортных моделей[11,12, 36-38] следует из уравнения (44) $p_q = const\,\rho_q^{1+2/D}$ при размерности фазового пространства скоростей $D = 2$.

Исследование выполнено в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014-2020 годы», Соглашение № 14.604.21.0052 от 30.06.2014 г. с Минобрнаукой. Уникальный идентификатор проекта RFMEFI60414X0052.

REFERENCES

[1] Prigogine I. “A Boltzmann-like Approach to the Statistical Theory of Traffic Flow”, *Proc. 1st Intern. Symposium on the Theory of Traffic Flow, R. Hermann (ed.), Elsevier,* 158-164 (1961).

[2] Prigogine I., Herman R. *Kinetic theory of vehicular traffic*, American Elsevier, New York. (1971).
[3] Prigogine I., Andrews F.C. «Boltzman-like approach for traffic flow», *Operations Research*. **8**. (6), 789-797 (1960).
[4] Prigogine I., Herman R., Anderson R.L. "Local Steady-State Theory and Macroscopic Hydrodynamics of Traffic Flow", *Proc. of the 3th Intern. Symposium on the Theory of Traffic Flow, New York, 1965, L. C. Edie at al. (eds.), Elsevier, New York,* 62-71 (1967).
[5] Prigogine I., Resibois P. «On a Generalized Boltzmann-like Approach for Traffic Flow», *Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg*. **48** (9), 805-814 (1962).
[6] Paveri-Fontana S.L. «On Boltzmann-like treatments for traffic flow: A critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis», *Transportation Research.* **9** (4), 225-235 (1975).
[7] Helbing D. «Improved fluid–dynamic model for vehicular traffic», *Phys. Rev. E,* **51,** 3163-3169 (1995).
[8] Tampere C. M. J. *Human-Kinetic Multiclass Traffic Flow Theory and Modelling: With Application to Advanced Driver Assistance Systems in Congestion*. TRAIL Thesis Series. T2004/11. The Netherlands. 305 (2004).
[9] Helbing D. «Traffic and related self-driven many particle systems», *Reviews of modern physics*. **73 (**4), 1067-1141 (2001)
[10] Karamzin Yu.N., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G. «Dvumernaya model' avtomobil'nykh potokov», *Matematicheskoe modelirovanie.* **18**(6), 85-95 (2006).
[11] Sukhinov A.B., Trapeznikova M.A., Chetverushkin B.N., Churbanova N.G. «Dvumernaya makroskopicheskaya transportnaya model'», *Matematicheskoe modelirovanie.* **21** (2), 118-126 (2009).
[12] Chetverushkin B. N., Trapeznikova M. A., Fourmanov I. R., Churbanova N. G. «Macro- and microscopic model to describe the motion of vehicles on multi-lane highways», *Proc. of MIPT* **2 (**4), 163 (2010)
[13] Chetverushkin B N. *Kinetically Consistent Schemes in Gas Dynamics: a New Model of Viscous Flow, Algorithms, Parallel Implementation, Application.* Moscow State Univ., Moscow (1999).
[14] Elizarova T. G. *Quasi-Gasdynamic Equations and Methods of Calculation of Viscous Flows*. Scientific World, Moscow (2007).
[15] Sheretov Y. V. *Continuum Dynamics in the Space-Time Averaging. Scientific Research Center 'Regular and Chaotic Dynamics*. Moscow-Izhevsk (2009)
[16] Chetverushkin B. N. «Resolution limits of continuous media mode and their mathematical formulations». *Math. Models Comp. Simul*. **5 (3)**, 266–279 (2013).
[17] Leontovich M. A. I*ntroduction to Thermodynamics. Statistical Physics*. Nauka, Moscow (1983).
[18] Olemskoi. A. I. *Synergetics of Complex Systems: Phenomenology and Statistical Theory*. KRASAND, Moscow (2009).
[19] Tsallis C. «Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics», *J. Stat. Phys*. **52**, 479-487 (1988).
[20] Curado E.M.F., Tsallis C. «Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics». *J. Phys*. A **24**, L69-72 (1991).
[21] Kolesnichenko A.V. «On construction of the entropy transport model based on the formalism of nonextensive statistics», *Mathematical models and computer simulations.* **6** (6), 587-597 (2014).
[22] Arimitsu T., Arimitsu N. «Analysis of turbulence by statistics based on generalized Entropies», *Physica*. A **295**, 177 (2001).

[23] Boghosian B.M. «Thermodynamic description of the relaxation of two-dimensional turbulence using Tsallis statistics», *Phys. Rev*. E **53**, 4754 (1996).
[24] Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: *Bibliography*/ http: //tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.
[25] Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. «The role of constraints within generalized Nonextensive statistics», *Physica A*. **261,** 534-554 (1998).
[26] Beck C. «Superstatistics, escort distributions, and applications», *Preprint.* [condmat/ 0312134] (2003).
[27] Tarasov V. E. *Fractional Dynamics. Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media,* Berlin:Springer (2010)
[28] Abramovits M., Strigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami.* Moskva: Nauka (1979).
[29] Kerson H. *Statistical Mechanics,* Wiley, New York-Toronto-Singapore (1990).
[30] Boghosian B. M., Coveney P. V. «Chapman-Enskog Derivation of the Thermohydrodynamic Lattice-BGK Model for the Ideal Gas», *Preprint. [arXiv:comp-gas/9810001]*, 12 (1998).
[31] Deshpande S. M. «Kintic theory based new upwind methods for inviscid compressible flow», *AIAA Paper № 86-0275, AIAA 24th Aerospace Science Meeting, 1986, Nevada, USA* (1986).
[32] Deshpande S.M., Mandal J.C. «Kinetic Theory Based New Upwind Methods for Inviscid Compressible Flows», *Theoretical and Applied Mechanics Journal, Bulgarian Academy of Sciences, Sofia,* **3**, 32-38 (1988).
[33] Lighthill M.G., Whitham G. B. «On kinetic waves II. A theory of traffic flow on ling crowded roads», *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*. **229** (1178), 317-345 (1955).
[34] Whitham G. B. *Linear and Nonlinear Waves*. Wiley-Interscience, New York (1974).
[35] Richards P. L. «Shock waves on the highway», *Operations Research,* **4 (**1), 42-51 (1956).
[36] Greenberg H. «An Analysis of Traffic Flow», *Operations Research*, **7**, 79-85 (1959).
[37] Payne H.J. «Models of Freeway Traffic and Control: Berkey G.A.», *Matematical Models of Public Systems,* **1**, 51-61 (1971).
[38] Zhang W., Tan G., Ding N., Wang G. «Traffic Congestion Evaluation and Signal Control Optimization Based on Wireless Sensor Networks: Model and Algorithms», *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*. *(Art. ID 573171),* 17 (2012).

Received August, 5 2015