АНАЛИЗ ПРЯМОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ И УСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

НИКОЛА МИХАЛЬЕВИЧ

Университет Черногории, Морской факультет
Котор, Черногория
e-mail: nikolamih@ac.me

Ключевые слова: оператор, характеристическая функция, асимптотика, собственные значения, спектральные параметры

Аннотация. В статье анализируется прямая спектральная задача и устанавливаются отношения между спектральными параметрами. Таким образом, подготавливаются условия для решения обратной задачи. Рассчитываются, также, коэффициенты из граничных условий оператора $D^{(2)}$ и значения функции задержки α на правом конце промежутка $[0,\pi]$.

ANALYSIS OF DIRECT SPECTRAL PROBLEM AND INSTALLATION OF INVERSE PROBLEM FOR THE STURM-LIOUVILLE

NIKOLA MIHALJEVIC

Maritime Faculty
University of Montenegro
85330 Kotor, Montenegro
e-mail: nikolamih@ac.me

Summary. Analyzed the direct spectral problem and establish the relationship between the spectral parameters in this article. Thus prepared the conditions for solving the inverse problem. The coefficients of the boundary conditions of the operator $D^{(2)}$ and the values of the delay α on the right end of the period $[0,\pi]$ are calculated as well.

2010 Mathematics Subject Classification: 34B24, 35B05.
Key words and Phrases: Operator, Characteristic Function, Asymptotic Form, Eigenvalues, Spectral parameters.

1 СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ СПЕКТРАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В дальнейшем анализе прямой спектральной задачи, мы будем опираться на два разных представления характеристической функции F, которые задаются:

$$F(z) = \pi\lambda_0 \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n}\right) \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned}
F(z) = &\left(-z + \frac{hH}{z}\right)\sin \pi z + (h+H)\cos \pi z + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 + \\
&+\frac{1}{2z}\Big[H\int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 + H\int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 + \\
&+h\int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1 - h\int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1\Big] + \\
&+\frac{hH}{2z^2}\Big[\int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1 - \int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1\Big] + \\
&+H\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{\frac{1}{z^l}\int_{D_l} Q(T_l)\sin z(\pi - t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1} + \\
&+\frac{h}{z^{l+1}}\int_{D_l} Q(T_l)\sin z(\pi - t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\Big\} + \\
&+\sum_{l=2}^{\infty}\Big\{\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1} + \\
&+\frac{h}{z^l}\int_{D_l} Q(T_l)\cos z(\pi - t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\Big\}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Также, мы будем использовать и асимптотическое представление этой функции при $z \to \infty$. Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
&a_c^+(z) = \int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1\ , \quad a_c^-(z) = \int_0^{\pi} q(t_1)\cos z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1\,, \\
&a_s^+(z) = \int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 + \alpha(t_1))dt_1\ , \quad a_s^-(z) = \int_0^{\pi} q(t_1)\sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_1))dt_1\,,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$b_{sc}(z)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1}\,,$$
$$b_{ss}(z)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\,,$$
$$b_{cc}(z)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\cos z(\pi-t_1)P(T_l,z)\cos z\alpha(t_1)dT_{l1}\,, \tag{4}$$
$$b_{cs}(z)=\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\cos z(\pi-t_1)P(T_l,z)\sin z\alpha(t_1)dT_{l1}\,.$$

Тогда запись формулы (2) может быть сокращена следующием образом

$$\begin{aligned}F(z)&=\left(-z+\frac{hH}{z}\right)\sin\pi z+(h+H)\cos\pi z+\\&+\frac{1}{2}a_c^+(z)+\frac{1}{2}a_c^-(z)+\frac{1}{2z}\left[Ha_s^+(z)+Ha_s^-+ha_s^+(z)-ha_s^-\right]+\\&+\frac{hH}{2z^2}\left[a_c^-(z)-a_c^+(z)\right]+\frac{H}{z}b_{sc}(z)+\frac{hH}{z^2}b_{ss}(z)+b_{cc}(z)+\frac{h}{z}b_{cs}(z).\end{aligned} \tag{5}$$

На основе (1) и (5) получаем выражение

$$\begin{aligned}\pi\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n}\right)&=\left(-z+\frac{hH}{z}\right)\sin\pi z+(h+H)\cos\pi z+\\&+\frac{1}{2}a_c^+(z)+\frac{1}{2}a_c^-(z)+\frac{1}{2z}\left[Ha_s^+(z)+Ha_s^-(z)+ha_s^+(z)-ha_s^-(z)\right]+\\&+\frac{hH}{2z^2}\left[a_c^-(z)-a_c^+(z)\right]+\frac{H}{z}b_{sc}(z)+\frac{hH}{z^2}b_{ss}(z)+b_{cc}(z)+\frac{h}{z}b_{cs}(z),\ \forall z\in C\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Выражение (6) открывает возможность постановки и решения обратной задачи в спектральной теории дифференциальных операторов типа $D^{(2)}$. Для определенности в дальнейшем будем считать, что q' абсолютно непрерывная функция. Тогда собственные значения оператора $D^{(2)}$ имеют асимптотику

$$\lambda_{nij}=n^2+\zeta_0+\frac{\zeta_1(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}+\frac{\zeta_2^{(0)}+\zeta_2^{(1)}(-1)^{n+1}\cos n\alpha(\pi)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{7}$$

Числа ζ_0, ζ_1, $\alpha(\pi)$, $\zeta_2^{(o)}$ и $\zeta_2^{(1)}$ являются параметрами асимптотического разложения собственных значений. Было показано ранее, что h и H, и функции q и α параметры оператора $D^{(2)}$. В дальнейшем мы будем комплексные функции a_c^+, a_c^-, a_s^+, a_s^-, b_{sc}, b_{ss}, b_{cc} и b_{cs} называть компонентами характеристической функции. Асимптотическим разложением левой и правой сторон выражения (6) устанавливается связь между параметрами асимптотики (7), с одной стороны и параметрами оператора $D^{(2)}$ с другой стороны, в соответствии с компонентами характеристической функции.

2 ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

В этой статье, обратная спектральная задача будет включать следующее: Если даны некоторые спектральные характеристики оператора $D^{(2)}$, далее оператор однозначно определен. Таким образом, например, если дана одна последовательность собственных значений оператора $D^{(2)}$, то оператор $D^{(2)}$ определен. Мы исходим из выражения (6), в котором левая сторона известна, в то время как компоненты на правой стороне неизвестны и требуется их вычислять. Понято, что в соответствии с классическими теоремами из теории аналитических функций, если две аналитические функции совпадают в точках бесконечных последовательностей, которые имеют конечную или бесконечную точку накопления, что они затем совпадают на всей комплексной плоскости (см. $[14]$ или $[16]$). Таким образом, выражение (6) эквивалентно следующей бесконечной системе уравнений

$$\begin{aligned}
&\pi\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}=\lim_{z\to 0}\left\{\left(-z+\frac{hH}{z}\right)\sin\pi z+(h+H)\cos\pi z+\right.\\
&+\frac{1}{2}a_c^+(z)+\frac{1}{2}a_c^-(z)+\frac{1}{2z}\left[Ha_s^+(z)+Ha_s^-(z)+ha_s^+(z)-ha_s^-(z)\right]+\\
&\left.+\frac{hH}{2z^2}\left[a_c^-(z)-a_c^+(z)\right]+\frac{H}{z}b_{sc}(z)+\frac{hH}{z^2}b_{ss}(z)+b_{cc}(z)+\frac{h}{z}b_{cs}(z)\right\},\\
&\pi\lambda_0\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_n}{n^2}\left(1-\frac{m^2}{\lambda_0}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{m^2}{\lambda_n}\right)=\left(-m+\frac{hH}{m}\right)\sin\pi m+(h+H)\cos\pi m+\\
&+\frac{1}{2}a_c^+(m)+\frac{1}{2}a_c^-(m)+\frac{1}{2z}\left[Ha_s^+(m)+Ha_s^-(m)+ha_s^+(m)-ha_s^-(m)\right]+\\
&+\frac{hH}{2m^2}\left[a_c^-(m)-a_c^+(m)\right]+\frac{H}{m}b_{sc}(m)+\frac{hH}{m^2}b_{ss}(m)+b_{cc}(m)+\frac{h}{m}b_{cs}(m),\ \forall m\in N
\end{aligned}\tag{8}$$

Имеем

$$a_c^+(m)=(-1)^m\int_0^\pi q(t_1)\cos m(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1,\ a_c^-(z)=(-1)^m\int_0^\pi q(t_1)\cos m(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1,$$

$$a_s^+(m)=(-1)^{m+1}\int_0^\pi q(t_1)\sin m(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1,\ a_s^-(z)=(-1)^{m+1}\int_0^\pi q(t_1)\sin m(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1$$

$$b_{sc}(m)=(-1)^{m+1}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin m(\pi-t_1)P(T_l,m)\cos m\alpha(t_1)dT_{l1},$$

$$b_{ss}(m)=(-1)^{m+1}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\sin m(\pi-t_1)P(T_l,m)\sin m\alpha(t_1)dT_{l1},$$

$$b_{cc}(m)=(-1)^m\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\cos m(\pi-t_1)P(T_l,m)\cos m\alpha(t_1)dT_{l1}\ ,$$

$$b_{cs}(m)=(-1)^m\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{m^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)\cos m(\pi-t_1)P(T_l,m)\sin m\alpha(t_1)dT_{l1}\ .$$

Далее полагаем

$$\gamma_1(t)=t-\alpha(t) \quad \text{и} \quad \gamma_2(t)=t+\alpha(t)$$

На основе ранее введенных условий для функции α, ясно, что функции γ_1 и γ_2 абсолютно непрерывные и монотонно возрастают на отрезке $[0,\pi]$. Таким образом, функция γ_1 взаимно однозначное отображение отрезка $[0,\pi]$ на отрезок $[0,\gamma_1(\pi)]$. Обозначим функцию γ_1^{-1} обратную функции γ_1. Также функция γ_2 взаимно однозначное отображение отрезка $[0,\pi]$ на отрезок $[0,\gamma_2(\pi)]$ и пусть γ_2^{-1} функция обратная функции γ_2.

В интегралах, которые определяют $a_c^{\pm}$ и $a_s^{\pm}$, введение замены переменных позволяет написать

$$a_c^{+}(m)=(-1)^m\int_0^{\gamma_1(\pi)}\frac{q\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}{1-\alpha'\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}\cos mt_1dt_1\ ,$$

$$a_c^{-}(m)=(-1)^m\int_0^{\gamma_2(\pi)}\frac{q\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}{1+\alpha'\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}\cos mt_1dt_1\ ,$$

$$a_s^{+}(m)=(-1)^{m+1}\int_0^{\gamma_1(\pi)}\frac{q\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}{1-\alpha'\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}\sin mt_1dt_1\ ,$$

$$a_s^{-}(m)=(-1)^{m+1}\int_0^{\gamma_2(\pi)}\frac{q\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}{1+\alpha'\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}\sin mt_1dt_1\ .$$

При любом фиксированном натуральном числе m уравнение (8) содержит 4 неизвестных параметра, которые на самом деле представляют собой произведение коэффициентов функций Фурье $\frac{q\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}{1-\alpha'\left(\gamma_1^{-1}(t_1)\right)}$ и $\frac{q\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}{1+\alpha'\left(\gamma_2^{-1}(t_1)\right)}$ синуса или косинуса. Отсюда заключаем, что одной последовательностью собственных значений оператор не определен. Поэтому ясно, что нужно задать больше чем одна последовательность собственных значений. Различные последовательности собственных значений с тем же потенциалом и той же функцией задержки мы получаем изменяющимися коэффициентами в граничных условиях на одном или обоих концах диапазона $[0,\pi]$. Предположим теперь, что мы имеем 4 последовательности собственных значений оператора $D^{(2)}$. Обозначим эти последовательности λ_{nij}, $i=1,2;\quad j=1,2;\quad n=0,1,2,\ldots$.

Последовательность собственных значений λ_{nij} соответствующая определенному оператору $D_{ij}^{(2)}$ генерируется с помощью

$$
\begin{gathered}
-y''(x)+q(x)y(\alpha(x))=\lambda y(x),\\
y'(0)-h_i y(0)=0,\\
y'(\pi)+H_j(\pi)=0.
\end{gathered}
$$

Тогда мы начинаем со следующих 4-х выражений

$$
\begin{aligned}
&\pi\lambda_{0ij}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nij}}{n^2}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{0ij}}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{nij}}\right)\equiv\left(-z+\frac{h_iH_j}{z}\right)\sin\pi z+\left(h_i+H_j\right)\cos\pi z+\\
&+\frac{1}{2}a_c^+(z)+\frac{1}{2}a_c^-(z)+\frac{1}{2z}\left[H_j a_s^+(z)+H_j a_s^-(z)+h_i a_s^+(z)-h_i a_s^-(z)\right]+\\
&+\frac{h_iH_j}{2z^2}\left[a_c^-(z)-a_c^+(z)\right]+\frac{H_j}{z}b_{sc}(z)+\frac{h_iH_j}{z^2}b_{ss}(z)+b_{cc}(z)+\frac{h_i}{z}b_{cs}(z),\ i,j=1,2..
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Введем следующие обозначения

$$
\begin{aligned}
g_{sc}(z)&=a_{sc}(z)+b_{sc}(z), \quad g_{ss}(z)=a_{ss}(z)+b_{ss}(z),\\
g_{cc}(z)&=a_{cc}(z)+b_{cc}(z), \quad g_{cs}(z)=a_{cs}(z)+b_{cs}(z),
\end{aligned}
\tag{10}
$$

где

$$
\begin{aligned}
a_{sc}&=\frac{1}{2}\left(a_s^+(z)-a_s^-(z)\right), \qquad a_{cc}=\frac{1}{2}\left(a_c^+(z)-a_c^-(z)\right),\\
a_{cs}&=\frac{1}{2}\left(a_s^+(z)+a_s^-(z)\right), \qquad a_{ss}=\frac{1}{2}\left(-a_c^+(z)+a_c^-(z)\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Тогда выражения (9) могут быть записаны следующим образом

$$
\begin{aligned}
&\pi\lambda_{0ij}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nij}}{n^2}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{0ij}}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{nij}}\right)\equiv\left(-z+\frac{h_iH_j}{z}\right)\sin\pi z+\left(h_i+H_j\right)\cos\pi z+\\
&+\frac{H_j}{z}g_{sc}(z)+\frac{h_iH_j}{z^2}g_{ss}(z)+g_{cc}(z)+\frac{h_i}{z}g_{cs}(z),\ i,j=1,2.
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Введем следующие функции Δ_{ij}

$$
\Delta_{ij}=\pi\lambda_{0ij}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{nij}}{n^2}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{0ij}}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_{nij}}\right)-
$$

$$-\left(-z+\frac{h_iH_j}{z}\right)\sin\pi z+\left(h_i+H_j\right)\cos\pi z\,,\quad i,j=1{,}2\quad\left(\forall z\in C\right).$$

Отсюда

$$\Delta_{ij}(z)=\frac{H_j}{z}g_{sc}(z)+\frac{h_iH_j}{z^2}g_{ss}(z)+g_{cc}(z)+\frac{h_i}{z}g_{cs}(z),\ i,j=1{,}2.\quad\left(\forall z\in C\right)\tag{13}$$

$$\begin{cases}H_2\Delta_{i1}(z)-H_1\Delta_{i2}(z)=\dfrac{h_i}{z}\left(H_2-H_1\right)g_{sc}(z)+\left(H_2-H_1\right)g_{cc}(z)\\ \Delta_{i1}(z)-\Delta_{i2}(z)=\dfrac{H_1-H_2}{z}g_{cs}(z)+\dfrac{h_i}{z^2}\left(H_1-H_2\right)g_{ss}(z)\end{cases},$$

следовательно

$$\begin{cases}\dfrac{H_2\Delta_{i1}(z)-H_1\Delta_{i2}(z)}{H_2-H_1}=\dfrac{h_i}{z}g_{cs}(z)+g_{cc}(z)\\ z\cdot\dfrac{\Delta_{i1}(z)-\Delta_{i2}(z)}{H_1-H_2}=\dfrac{h_i}{z}g_{ss}(z)+g_{cs}(z)\end{cases}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}\dfrac{H_2\Delta_{11}(z)-H_1\Delta_{12}(z)-H_2\Delta_{21}(z)+H_1\Delta_{22}(z)}{H_2-H_1}=\dfrac{h_1-h_2}{z}g_{cs}(z)\\ z\cdot\dfrac{\Delta_{11}(z)-\Delta_{12}(z)-\Delta_{21}(z)+\Delta_{22}(z)}{H_1-H_2}=\dfrac{h_1-h_2}{z}g_{ss}(z)\end{cases},$$

и

$$\begin{cases}\dfrac{h_2H_2\Delta_{11}(z)-h_2H_1\Delta_{12}(z)-h_1H_2\Delta_{21}(z)+h_1H_1\Delta_{22}(z)}{H_2-H_1}=\left(h_2-h_1\right)g_{cc}(z)\\ z\cdot\dfrac{h_2\Delta_{11}(z)-h_2\Delta_{12}(z)-h_1\Delta_{21}(z)+h_1\Delta_{22}(z)}{H_1-H_2}=\left(h_2-h_1\right)g_{sc}(z)\end{cases}.$$

Далее

$$\alpha_1(z)=\frac{2z\left(H_2\Delta_{11}(z)-H_1\Delta_{12}(z)-H_2\Delta_{21}(z)+H_1\Delta_{22}(z)\right)}{\left(H_2-H_1\right)\left(h_1-h_2\right)}=2g_{cs}(z)=2a_{cs}(z)+2b_{cs}(z),$$

$$\beta_1(z)=\frac{2z\left(h_2\Delta_{11}(z)-h_2\Delta_{12}(z)-h_1\Delta_{21}(z)+h_1\Delta_{22}(z)\right)}{\left(H_1-H_2\right)\left(h_2-h_1\right)}=2g_{sc}(z)=2a_{sc}(z)+2b_{sc}(z),$$

$$\alpha_2(z)=\frac{2\left(h_2H_2\Delta_{11}(z)-h_2H_1\Delta_{12}(z)-h_1H_2\Delta_{21}(z)+h_1H_1\Delta_{22}(z)\right)}{\left(H_2-H_1\right)\left(h_1-h_2\right)}=2g_{cc}(z)=2a_{cc}(z)+2b_{cc}(z),$$

$$\beta_2(z)=\frac{2z^2\left(\Delta_{11}(z)-\Delta_{12}(z)-\Delta_{21}(z)+\Delta_{22}(z)\right)}{\left(H_1-H_2\right)\left(h_2-h_1\right)}=2g_{ss}(z)=2a_{ss}(z)+2b_{ss}(z).$$

Из этого, а также из (10) получаем

$$a_s^+(z)=\frac{\alpha_1(z)+\beta_1(z)}{2}-\left(b_{cs}(z)+b_{sc}(z)\right),\quad a_c^+(z)=\frac{\alpha_2(z)-\beta_2(z)}{2}-\left(b_{cc}(z)-b_{ss}(z)\right),$$

и

$$a_s^-(z)=\frac{-\alpha_1(z)+\beta_1(z)}{2}-\left(b_{sc}(z)+b_{cs}(z)\right),\quad a_c^-(z)=\frac{\alpha_2(z)+\beta_2(z)}{2}-\left(b_{cc}(z)+b_{ss}(z)\right). \tag{14}$$

Потому что оперативно, ввести равенства (14) в своем первоначалном виде

$$\begin{aligned} a_c^+(z)=&\frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{z^2[F_{11}(z)+F_{22}(z)-F_{12}(z)-F_{21}(z)]+\\ &+H_2[h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)]-H_1[h_2F_{12}(z)-h_1F_{22}(z)]\}-\\ &-b_{ss}(z)-b_{cc}(z)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} a_c^-(z)=&\frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{H_2[h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)]-H_1[h_2F_{12}(z)-h_1F_{22}(z)]+\\ &+z^2[F_{11}(z)+F_{22}(z)-F_{12}(z)-F_{21}(z)]\}+\\ &+b_{ss}(z)-b_{cc}(z)+2z\sin\pi z\end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} a_s^+(z)=&\frac{z}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)-h_2F_{12}(z)+h_1F_{22}(z)+\\ &+H_2[F_{11}(z)-F_{21}(z)]+H_1[F_{12}(z)-F_{22}(z)]\}-\\ &-b_{cs}(z)-b_{sc}(z)+2z\cos\pi z\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} a_s^+(z)=&\frac{z}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)-h_2F_{12}(z)+h_1F_{22}(z)+\\ &+H_2[F_{11}(z)-F_{21}(z)]H_1[F_{12}(z)-F_{22}(z)]\}+\\ &+b_{cs}(z)-b_{sc}(z)\end{aligned} \tag{18}$$

Здесь функции $b_{cs}(z)$, $b_{sc}(z)$, $b_{ss}(z)$ и $b_{cc}(z)$ определене с (4). Введем обозначения

$$\begin{aligned} A_c^+(z)=&\frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{z^2[F_{11}(z)+F_{22}(z)-F_{12}(z)-F_{21}(z)]+\\ &+H_2[h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)]-H_1[h_2F_{12}(z)-h_1F_{22}(z)]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_c^-(z)=&\frac{1}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{H_2[h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)]-H_1[h_2F_{12}(z)-h_1F_{22}(z)]+\\ &+z^2[F_{11}(z)+F_{22}(z)-F_{12}(z)-F_{21}(z)]\}\end{aligned}$$

$$A_s^+(z)=\frac{z}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)-h_2F_{12}(z)+h_1F_{22}(z)+$$
$$+H_2[F_{11}(z)-F_{21}(z)]+H_1[F_{12}(z)-F_{22}(z)]\}$$

$$A_s^+(z)=\frac{z}{(H_1-H_2)(h_1-h_2)}\{h_2F_{11}(z)-h_1F_{21}(z)-h_2F_{12}(z)+h_1F_{22}(z)+$$
$$+H_2[F_{11}(z)-F_{21}(z)]H_1[F_{12}(z)-F_{22}(z)]\}$$

и

$$\Delta_c^+(z)=-b_{ss}(z)-b_{cc}(z)$$
$$\Delta_c^-(z)=b_{ss}(z)-b_{cc}(z)+2z\sin\pi z$$
$$\Delta_s^+(z)=-b_{cs}(z)-b_{sc}(z)+2z\cos\pi z$$
$$\Delta_s^-(z)=b_{cs}(z)-b_{sc}(z)$$

Тогда равенства (15) – (18) становятся

$$a_c^+(z)=A_c^+(z)+\Delta_c^+(z)$$
$$a_c^-(z)=A_c^-(z)+\Delta_c^-(z)$$
$$a_s^+(z)=A_s^+(z)+\Delta_s^+(z)$$
$$a_s^-(z)=A_s^-(z)+\Delta_s^-(z)$$

Последнее равенства в ряд, предписывая в следующем виде

$$\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1=$$
$$=A_c^+(z)-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi-t_1+\alpha(t_l))dT_l \tag{19}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1=$$
$$=A_c^-(z)-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)P(T_l,z)\cos z(\pi-t_1-\alpha(t_l))dT_l \tag{20}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1+\alpha(t_1))dt_1=$$
$$=A_s^+(z)-\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{z^{l-1}}\int_{D_l}Q(T_l)P(T_l,z)\sin z(\pi-t_1+\alpha(t_l))dT_l \tag{21}$$

$$\int_0^\pi q(t_1)\sin z(\pi-t_1-\alpha(t_1))dt_1=$$

$$= A_s^-(z) - \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{z^{l-1}} \int_{D_l} Q(T_l) P(T_l, z) \sin z(\pi - t_1 - \alpha(t_l)) dT_l \qquad (22)$$

Последние 4 равенства играют важную роль в формировании интегральных уравнений, в результате решение которых мы получаем функции, которые зависят от потенциала q и функцию задержки α.

3 ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИЗ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ОПЕРАТОРА $D_{ij}^{(2)}$

Формирование интегральных уравнений, из решения которых мы можем получить потенциал q и функцию задержки α, только после получения коэффициентов из граничных условий h_i и H_j; $i = 1,2$; $j = 1,2$; а также и размер $\alpha(\pi)$.

Теорема 1. Пусть даны 4 последовательности собственных значений λ_{nij}; $i = 1,2$; $j = 1,2$; $n = 1,2,...$ с асимптотикой (7). Тогда коэффициенты h_i ($i = 1,2$) и H_j ($j = 1,2$) имеют вид

$$h_1 = \frac{\xi_{12}(\zeta_{022} - \zeta_{021})}{\xi_{22} - \xi_{12}}, \qquad h_2 = \frac{\xi_{22}(\zeta_{022} - \zeta_{021})}{\xi_{22} - \xi_{12}},$$

$$H_1 = \frac{\xi_{11}(\zeta_{012} - \zeta_{011})}{\xi_{12} - \xi_{11}}, \qquad H_2 = \frac{\xi_{12}(\zeta_{012} - \zeta_{011})}{\xi_{12} - \xi_{11}}.$$

Доказательство. На основе соотношения

$$\lambda_{nij} = n^2 + \zeta_{0ij} + \frac{\zeta_1 (-1)^{n+1} \sin n\alpha(\pi)}{n} + \frac{\zeta_{2ij}^{(0)} + \zeta_{2ij}^{(1)} (-1)^{n+1} \cos n\alpha(\pi)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

для $n = 1,2,...,$ $j = 1,2,$ где $\zeta_{0ij} = 2C_{1ij}$, $\zeta_1 = 2C_2$, $\zeta_{2ij}^{(0)} = 2C_{3ij}^{(0)} + \dfrac{(h_i + H_j)^2}{\pi^2}$ и $\zeta_{2ij}^{(1)} = 2C_{3ij}^{(1)}$ и

$$C_{1ij} = \frac{h_i + H_j}{\pi}, \qquad \tilde{q}_1(t_1) = \frac{q(t_1)}{\alpha'(t_1) - 1}, \qquad \tilde{q}_2(t_1) = \frac{q(t_1)}{-\alpha'(t_1) - 1},$$

$$C_2 = \frac{\tilde{q}_2(\pi) - \tilde{q}_1(\pi)}{2\pi}, \qquad \tilde{\tilde{q}}_1(t_1) = \frac{\tilde{q}_1'(t_1)}{\alpha'(t_1) - 1}, \qquad \tilde{\tilde{q}}_2(t_1) = \frac{\tilde{q}_2'(t_1)}{-\alpha'(t_1) - 1},$$

$$C_{3ij}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3 C_{1ij}^3}{6} - \pi C_{1ij}^2 + \pi C_1 h_i H_j - \frac{1}{2}(h_i + H_j)\pi^2 C_{1ij}^2 - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(0) + \tilde{\tilde{q}}_2(0)}{2} - \right.$$

$$\left. - C_{1ij}\pi \frac{\tilde{q}_1(0) + \tilde{q}_2(0)}{2} + \frac{H_j + h_i}{2} \tilde{q}_1(0) + \frac{H_j - h_i}{2} \tilde{q}_2(0)\right),$$

$$C_{3ij}^{(0)} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\tilde{q}_2(\pi) - \tilde{q}_1(\pi)}{2} C_{1ij}\alpha(\pi) - \frac{\tilde{\tilde{q}}_1(\pi) + \tilde{\tilde{q}}_2(\pi)}{2} + \frac{H_j + h_i}{2}\tilde{q}_1(\pi) + \frac{H_j - h_i}{2}\tilde{q}_2(\pi) \right),$$

получим асимптотику характеристической функций на действительной оси в виде

$$F_{ij}(z) = -z\sin\pi z + \frac{\pi}{2}\zeta_{0ij}\cos\pi z + \left(\lambda_{0ij} - \frac{\zeta_{0ij}}{2} + s_{1ij} + \frac{\zeta_{1ij}\pi\alpha(\pi)}{2} + \frac{\pi}{8}\zeta_{0ij}^2\right)\frac{\sin\pi z}{z} -$$

$$-\frac{\zeta_1\pi}{2}\sin z\alpha(\pi) + \frac{1}{z^2}\left[\left(\frac{\zeta_{2ij}^{(0)}\pi}{2} - \frac{\pi^2\zeta_{0ij}\zeta_1\alpha(\pi)}{4} + \frac{3}{8}\pi\zeta_{0ij}^2 - \frac{\pi^3\zeta_{0ij}^3}{48} - \frac{\pi\zeta_{0ij}\lambda_{0ij}}{2}\right)\cos\pi z + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\zeta_{2ij}^{(1)}\pi}{2} + \frac{1}{4}\pi\zeta_{0ij}\zeta_1\alpha(\pi)\right)\cos z\alpha(\pi)\right] + O\left(\frac{\cos\pi z}{z^3}\right). \tag{23}$$

С другои стороны

$$F_{ij}(z) = \left(-z + \frac{h_i H_j}{z}\right)\sin\pi z + (h_i + H_j)\cos\pi z +$$

$$+\frac{1}{2}\left(a_c^+(z) + a_c^-(z)\right) + \frac{h_i}{2z}\left(a_s^+(z) - a_s^-(z)\right) + \frac{H_j}{2z}\left(a_s^+(z) + a_s^-(z)\right) +$$

$$+\frac{h_i H_j}{2z^2}\left(a_c^-(z) - a_c^+(z)\right) + o\left(\frac{1}{z^2}\right). \tag{24}$$

Требование, чтобы (23) и (24) представляли ту же самую функцию, приводит нас к уравнению

$$h_i + H_j = \frac{\pi}{2}\zeta_{0ij} \qquad \text{и} \qquad h_i H_j = \xi_{ij}, \quad i, j = 1,2; \tag{25}$$

где

$$\xi_{ij} = \lambda_{0ij} - \frac{\zeta_{0ij}}{2} + s_{1ij} + \frac{\zeta_{1ij}\pi\alpha(\pi)}{2} + \frac{\pi}{8}\zeta_{0ij}^2$$

и

$$s_{1ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\lambda_{ijj} - n^2 - \zeta_{0ij} - \zeta_1\frac{(-1)^{n+1}\sin n\alpha(\pi)}{n}\right).$$

Система алгебраических уравнений (25) имеет однородное симметричное решение. А именно, если (h_1, h_2, H_1, H_2) решение системы (25) то (H_1, H_2, h_1, h_2) также решение. Количество $\alpha(\pi)$ читается прямо из асимптотики собственных значений.

REFERENCES

[1] N.Mihaљeviħ, M.Pikula, Karakteristichna funktcija operatora tipa Shturm-Leeuvila sa promenљivim kashњeњem, Zbornik Fakulteta za pomorstvo u Kotoru, **20**, 403-410 (2003).

[2] S.B. Norkin, Differentcial`ny`e uravneniia vtorogo poriadka s zapazdy`vaiushchim argumentom, Nauka, Moskva (1965).

[3] I.M. Gel`fand, B.M.Levitan, "Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia po ego spektral`noi` funktcii", Izv. AN SSSR, Ser. Mat., **15,** 309-360 (1951).

[4] L.E`. E`l`sgol`tc, S.B. Norkin, Vvedenie v teoriiu differentcial`ny`kh uravnenii` s otcloniaiushchimsia argumentom, Nauka, Moskva (1971).

[5] R.Lazović, M.Pikula, "Regularized trace of the operator applied to solving inverse problems", *Radovi matematički* (2002).

[6] M. Pikula, "Ob opredelenii differentcial`nogo uravneniia s peremenny`m zapazdy`vaniem", *Mathematica Montisnigri*, **VI**, 71-91 (1996).

[7] M. Pikula, "Opredelenie differentcial`nogo operatora Shturma-Leeuvillia s zapazdy`vaiushchim argumentom po dvum spektram", Matematicheskii` vestneyk, **43**, 159-171 (1991).

[8] R.Lazoviħ, Konstruktcija operatora tipa Shturma-Leeuvila sa kashњeњem, Doktorska disertatcija, Beograd (1998).

[9] N.Mihaljevich, "A reconstruction of the operator by using given spectral characteristic", *Mathematica Montisnigri*, **XX-XXI**, 15-34 (2007-2008).

[10] N.Mihaljevich, M.Pikula, "The inverse Sturm-Liouville problem with changeable delay", *Mathematica Montisnigri*, **XVI**, 41-68 (2003).

[11] V.A. Sadovnichii`, Teoriia operatorov, Moskva, MGU (1979).

[12] N.Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.,* **13**, 25-30 (1949).

[13] N.Mihaљevich, "Asimptotika soobstvenny`kh znachenii` operatora tipa Shturm-Leeuvilia s peremenny`m zapazdy`vaniem", *Mathematica Montisnigri*, **XXVIII**, 5-16 (2013).

[14] B.V.Shabat, Vvedenie v kompleksny`i` analiz, Nauka, Moskva (1985).

[15] N.Mihaљevich, "Predstavlenie haraktericheskoi` funktcii operatora tipa Shturma-Leeuvillia po nuliam", *Mathematica Montisnigri*, **XXXI**, 25-37 (2014).

[16] L.V. Ahlfors, *Complex analysys,* Mc Graw-Hill Book Company (1953).

Received August, 10 2015.